

*Studienarbeit*

# Modellierung und Regelung des hydraulischen Antriebs einer Feuerwehrdrehleiter

*vorgelegt von*  
Johannes Störkle

*Studiengang*  
Maschinenbau

*Prüfer*  
Prof. Dr.-Ing. Oliver Sawodny

*Betreuer*  
Dipl.-Ing. Alexander Pertsch, Dipl.-Ing. Martin Weickgenannt

*Datum*  
27. September 2012



## **Kurzfassung**

In dieser Arbeit wird die Modellierung und Regelung des hydraulischen Antriebs einer Feuerwehdrehleiter untersucht. Bisher wurden am Institut für Systemdynamik im Rahmen des Forschungsprojektes der aktiven Schwingungsdämpfung für IVECO Magirus Feuerwehdrehleitern die mechanischen Leiterschwingungen betrachtet. Im Unterschied hierzu befasst sich diese Arbeit mit der Analyse der hydraulischen Schwingungen anhand eines starren Leitermodells. Zunächst werden der Aufbau und die Modellierung grundlegender hydraulischer Komponenten vorgestellt. Mit Hilfe eines hydraulischen Ein-Massen-Schwinger-Systems wird die prinzipielle lineare und nichtlineare Hydraulikkreismodellierung – im späteren Verlauf auch die Folgeregelung – dargestellt. Anschließend wird das dynamische Modell des Leiterantriebs hergeleitet und die unbekanntes Modellparameter anhand von Messergebnissen identifiziert. Durch das Linearisieren des nichtlinearen Modells um einen Arbeitspunkt ergibt sich das lineare Modell, das die Übertragungsfunktion der Leiterhydraulik liefert und gleichzeitig den Entwurf einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung ermöglicht. Mit dieser Reglerstruktur kann das System einer vorgegebenen Leiterposition zuverlässig folgen und die hydraulischen Schwingungen können verringert werden. Die Ergebnisse dieser Arbeit können zur Entwicklung einer aktiven Schwingungsdämpfung für die Handhebelsteuerung verwendet werden, die beim Aufrichten und Neigen der Feuerwehrleiter die hydraulischen Schwingungen kompensiert.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1	Motivation . . . . .	7
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Modellierung hydraulischer Bauteile</b>	<b>9</b>
2.1	Hydraulikaktoren . . . . .	9
2.2	Hydraulikventile . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Modellierung eines Hydraulikzylinders mit Ein-Massen-Schwinger</b>	<b>19</b>
3.1	Nichtlineares Modell . . . . .	19
3.2	Lineares Modell . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Modellierung einer hydraulischen Drehleiter</b>	<b>29</b>
4.1	Modellbildung . . . . .	29
4.2	Systemidentifikation . . . . .	35
4.3	Linearisierung des hydraulischen Leiterantriebs . . . . .	40
4.4	Simulation und Validierung . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Folgeregung eines Hydraulikkreises</b>	<b>51</b>
5.1	Zwei-Freiheitsgrade-Regelung . . . . .	51
5.2	Trajektorien-Folgeregung des Ein-Massen-Schwingers . . . . .	52
5.3	Trajektorien-Folgeregung für die Feuerwehrlener . . . . .	55
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>61</b>
<b>A</b>	<b>Grundlagen der Strömungsmechanik</b>	<b>63</b>
A.1	Kinematik der Fluide . . . . .	63
A.2	Gleichungen der Stromfadentheorie . . . . .	64
A.3	Impulssatz . . . . .	67
A.4	Hydraulikflüssigkeiten . . . . .	68
A.5	Ergänzung zur Ventilmodellierung: Strömungskräfte . . . . .	72
<b>B</b>	<b>Bestimmung von polynomialen Referenz-Trajektorien</b>	<b>77</b>
<b>C</b>	<b>Auflistung der Simulationsparameter</b>	<b>79</b>
<b>D</b>	<b>Animation hydraulischer Systeme mit MatHydAnim</b>	<b>83</b>
D.1	Dokumentation der Matlab-Toolbox: MatHydAnim . . . . .	84
D.2	Beispiel-Code . . . . .	92

*Inhaltsverzeichnis*

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>97</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>101</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>103</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Bei mehreren am Institut für Systemdynamik (ISYS) betrachteten mechanischen Aufbauten werden hydraulische Antriebe als Aktoren eingesetzt, da sie ein vorteilhaftes Verhältnis von Leistung zur Baugröße bieten [GS08]. So erzeugen sie auch bei der aktiven Schwingungsdämpfung für IVECO Magirus Feuerwehdrehleitern die benötigten Kräfte [ZSKL09]. In vorhergehenden Arbeiten wurden die mechanischen Leiterschwingungen dieses Systems untersucht und die hydraulischen Einflüsse des Antriebs vernachlässigt [Zim11]. Im Gegensatz dazu soll in dieser Arbeit das dynamische Verhalten des hydraulischen Antriebs der Drehleiter genauer untersucht werden.

Der als starr angenommene Leitersatz und Leiterkorb wird durch zwei Arbeitszylinder bewegt, die in Abbildung 1.1 dargestellt sind. Aufgrund der kompressiblen Hydraulikflüssigkeit treten bei einer Bewegungsänderung Schwingungen im Hydrauliksystem auf. In dieser Arbeit werden der Druckaufbau im Hydraulikzylinder, die Ansteuerung der Hydraulikventile, sowie das Verhalten des Hydraulikkreises genauer betrachtet und modelliert. Für den Hydraulikkreis, der das Aufrichten und Neigen der Feuerwehrleiter ermöglicht, werden Modellparameter identifiziert und mit diesen das Modell validiert. Hierzu liegen Daten aus Identifikationsmessungen vor. Aufbauend auf dem Modell und den identifizierten Parametern wird eine Trajektorien-Folgeregelung entwickelt, durch die die Anregung der hydraulischen Schwingungen weitgehend kompensiert wird.

### 1.2 Aufbau der Arbeit

Das einleitende Kapitel 1 stellt das Thema und die Aufgabenstellung der Studienarbeit vor. Im Kapitel 2 wird die grundlegende Modellierung idealisierter hydraulischer Komponenten beschrieben. Hierbei steht das Aufstellen der System-Differentialgleichungen der verschiedenen hydraulischen Elementen im Vordergrund. Das Kapitel 3 stellt die nichtlineare und lineare Modellierung eines hydraulischen Kreises vor. Als Beispielmotiv wird ein hydraulischer Ein-Massen-Schwinger verwendet. Die Modellierung und Identifikation des hydraulischen Antriebs der Feuerwehdrehleiter wird in Kapitel 4 anhand vorhandener Messdaten durchgeführt. Außerdem wird das nichtlineare Modell

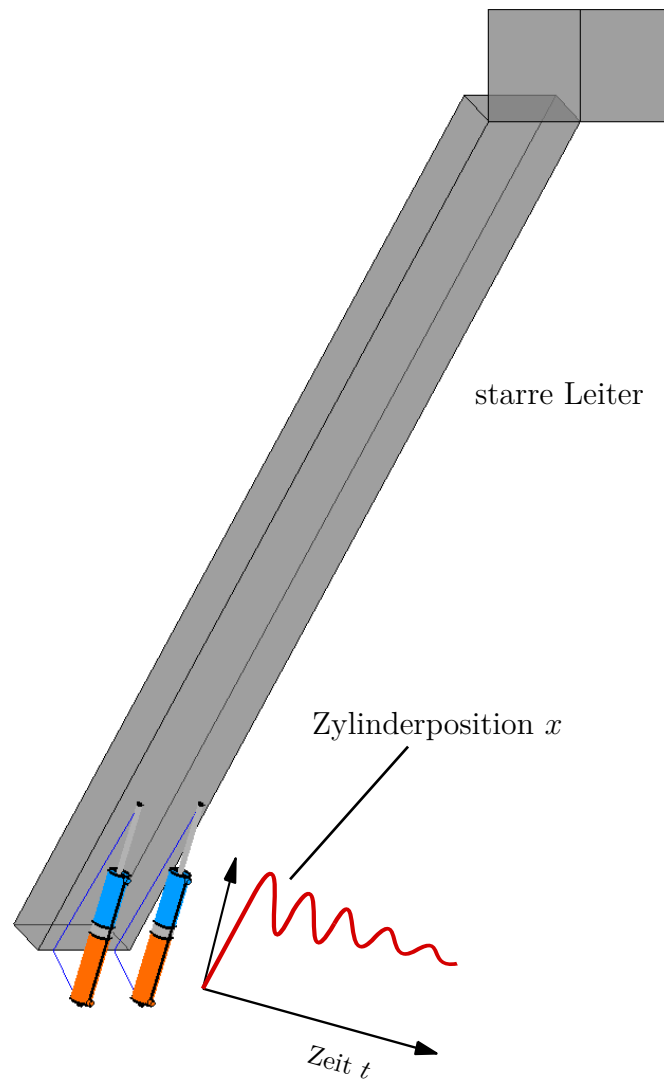


Abbildung 1.1: Darstellung des hydraulischen Antriebs einer Feuerwehrdrehleiter.

um einen Arbeitspunkt linearisiert. Anhand des linearen Modells kann die Dynamik der Antriebshydraulik sehr einfach untersucht werden. In Kapitel 5 wird eine Regelung für Hydraulikkreise entworfen. Dabei wird sowohl für den Ein-Massen-Schwinger als auch für das Feuerwehrleitermodell eine Trajektorien-Folgeregelung entwickelt. Das sechste Kapitel gibt nach einer kurzen Zusammenfassung ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen.



# Kapitel 2

## Modellierung hydraulischer Bauteile

In diesem Kapitel werden die Grundlagen zur Modellierung hydraulischer Komponenten erläutert. Die Schwerpunkte liegen hierbei auf der physikalischen Beschreibung eines doppelwirkenden Hydraulikzylinders in Kapitel 2.1.1 und der Herleitung der Blinden-gleichung in Kapitel 2.2.1, die maßgeblich für die Modellierung eines Hydraulikventils ist.

### 2.1 Hydraulikaktoren

Eine wesentliche Aufgabe eines hydraulischen Systems ist die Umwandlung von hydraulischer Energie in mechanische Bewegungsenergie. Hierfür werden Hydraulikaktoren in verschiedenen Bauformen eingesetzt.

#### 2.1.1 Hydraulikzylinder

In der Hydraulik werden Arbeitszylinder verwendet, um hydraulische Energie in eine translatorische, mechanische Kraft und Bewegung umzuformen. Deshalb werden Hydraulikzylinder auch als Linearmotoren bezeichnet. Unabhängig von der Bauform des Zylinders lässt sich das mechanische Verhalten eines Kolbens mit der Position  $x$ , der Masse  $m_p$  und einer viskosen Dämpfung  $d_p$  beschreiben. Das Modell ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Mit Hilfe der Impulsbilanz am Zylinderkolben lässt sich die Bewegungsgleichung formulieren,

$$m_p \ddot{x} + d_p \dot{x} = f_{pA} - f_{\text{link}} . \quad (2.1)$$

Die Last auf den Arbeitszylinder wird mit  $f_{\text{link}}$  und die aus den Druckkräften resultierende Kraft mit  $f_{pA}$  bezeichnet.

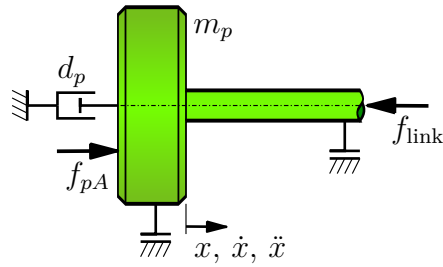


Abbildung 2.1: Mechanisches Modell eines Hydraulikzylinders.

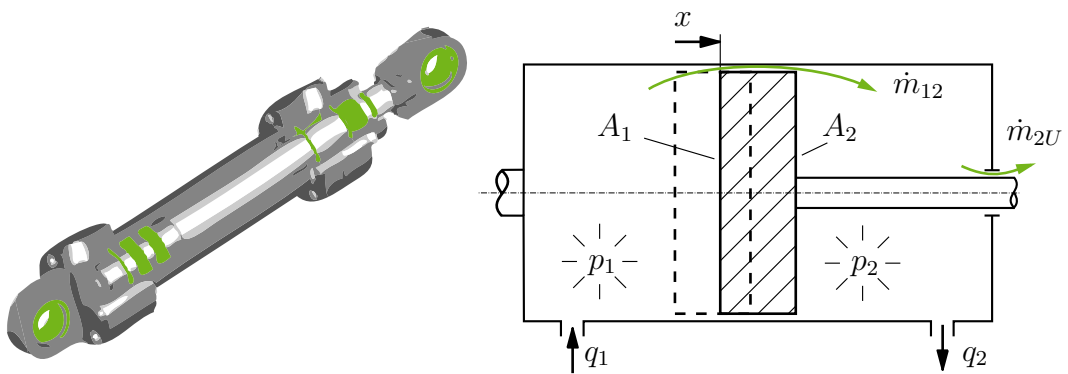


Abbildung 2.2: Hydraulisches Modell eines doppelwirkenden Hydraulikzylinders.

## Doppeltwirkender Zylinder

Die häufigste Bauform eines Hydraulikzylinders ist der „doppeltwirkende Arbeitszylinder“, dargestellt in Abbildung 2.2. Er besteht im Wesentlichen aus zwei befüllbaren Druckkammern, die durch den verschiebbaren Zylinderkolben voneinander getrennt sind. Jede Kammer kann durch einen eigenen Anschluss mit Hydraulikflüssigkeit versorgt werden. Somit hat der doppeltwirkende Zylinder in den Kammern die Drücke  $p_1$  und  $p_2$ , die Volumina  $V_1$  und  $V_2$ , die Massen  $m_1$  bzw.  $m_2$  und die effektiven Kolbenflächen  $A_1$  und  $A_2$ . Dadurch kann der bewegliche Kolben in beiden Richtungen Arbeit verrichten. Die aus den Druckkräften resultierende Kraft auf einen doppeltwirkenden Zylinder ist

$$f_{pA} = p_1 A_1 - p_2 A_2 . \quad (2.2)$$

Der Druck in einer Kammer hängt vor allem von dem ein- bzw. ausströmenden Volumenstrom und der Kolbenposition  $x$  ab. Dies lässt sich durch eine Druckaufbau-Differentialgleichung ausdrücken, die mit Hilfe des Massenerhaltungssatz (A.8) im Folgenden hergeleitet wird. Für Kammer 1 ergibt sich die Massenbilanz

$$\frac{d}{dt} m_1 = \frac{d}{dt} (\rho_1 V_1) = q_1 \rho_1 - \dot{m}_{12} \quad (2.3)$$

mit der druckabhängigen Dichte  $\rho_1(p_1)$ . Der in die Kammer 1 fließende Volumenstrom wird mit  $q_1$  und ein möglicher Leckage-Massenstrom in Kammer 2 mit  $\dot{m}_{12}$  bezeichnet. Für die Berechnung der Ableitung ergibt sich mit dem Anfangsvolumen  $V_{01}$  für  $x = 0$

$$\frac{d}{dt} (\rho_1 V_1) = \frac{d}{dt} \rho_1 (V_{01} + A_1 x) = \frac{d\rho_1}{dt} (V_{01} + A_1 x) + \rho_1 A_1 \dot{x} . \quad (2.4)$$

Die zeitliche Ableitung der Dichte vereinfacht sich durch die Annahme einer isothermen Zustandsänderung entsprechend (A.26) und die Vernachlässigung der expliziten Zeitabhängigkeit zu

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\partial \rho_1}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = \frac{\rho_1}{\beta} \frac{dp_1}{dt} . \quad (2.5)$$

Durch das Einsetzen von (2.5) und (2.4) in (2.3) ergibt sich nun die folgende Druck-Differentialgleichung für die Kammer 1,

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\beta}{(V_{01} + A_1 x)} \left( q_1 - \frac{\dot{m}_{12}}{\rho_1} - A_1 \dot{x} \right) . \quad (2.6)$$

Analog hierzu lässt sich unter Beachtung der Vorzeichen die Druck-Differentialgleichung für die Kammer 2 herleiten

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{\beta}{(V_{02} - A_2 x)} \left( -q_2 - \frac{\dot{m}_{2U} - \dot{m}_{12}}{\rho_2} + A_2 \dot{x} \right) . \quad (2.7)$$

Der Leckage-Massenstrom  $\dot{m}_{2U}$  in die Umgebung kann ebenso wie der Massenstrom  $\dot{m}_{12}$  von Kammer 1 in Kammer 2 in der Regel vernachlässigt werden. Die Dichten  $\rho_1$  und  $\rho_2$

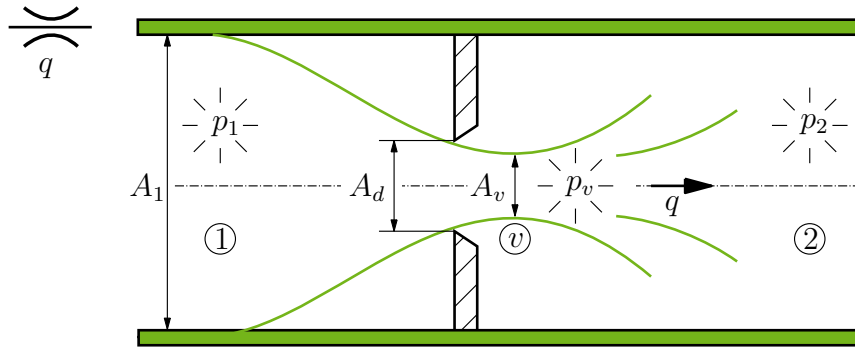


Abbildung 2.3: Scharfkantige hydraulische Drossel.

sind abhängig vom Druck und lassen sich durch die folgenden isentropen-Beziehungen errechnen [Kem12],

$$\rho_1 = \rho_0 e^{\frac{p_1}{\beta}} \quad \rho_2 = \rho_0 e^{\frac{p_2}{\beta}} . \quad (2.8)$$

In den meisten Fällen können die Dichten als konstant angenommen werden. Für mineralölbasierte Hydraulikflüssigkeiten beträgt die Dichte  $\rho \approx 800 \dots 850 \text{ kg/m}^3$ .

## 2.2 Hydraulikventile

Hydraulikventile gehören zu den wichtigsten Komponenten einer Hydraulikanlage. Sie können zur Steuerung und Regelung von Start, Stopp und Fließrichtungen, sowie Druck und Durchfluss eines Druckmittels eingesetzt werden. Im Folgenden werden zunächst die Strömungsverhältnisse an einer hydraulischen Drossel erklärt. Anschließend werden die wichtigsten Gleichungen des 2/2, 3/3 und 4/3 - Wegeventils vorgestellt.

### 2.2.1 Hydraulische Drossel

Zur Herleitung der mathematischen Beschreibung eines Ventils wird vorweg das Modell einer durchströmten, scharfkantigen Drosselscheibe untersucht [FF94], [Mer67]. Betrachtet wird nun die Strömung einer Flüssigkeit durch die hydraulische Drossel mit dem Einlassquerschnitt  $A_1$ , dem Querschnitt  $A_d$  am Drosseldurchmesser und dem Auslassquerschnitt  $A_2$ . Diese Drossel ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Durch die Blende kommt es zu einer Einschnürung der Strömung, wobei sich die minimale Querschnittsfläche  $A_v$  im Bereich hinter der Blende befindet, der auch als *vena contracta* bezeichnet wird [Kem12].

Aus der inkompressiblen Bernoulli-Gleichung (A.15) entlang des Stromfadens in der Symmetrieachse von ① nach ② folgt

$$\frac{\rho}{2} c_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2} c_v^2 + p_v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{\rho c_v^2} (p_1 - p_v) = 1 - \left( \frac{c_1}{c_v} \right)^2 , \quad (2.9)$$

wobei  $c_1$  die Fluidgeschwindigkeit am Einlassquerschnitt und  $c_v$  die Geschwindigkeit im Bereich der *vena contracta* ist. Das Verhältnis des einschnürenden Strömungsquerschnittes  $A_v$  zum Blendenöffnungsquerschnitt  $A_d$  wird als Einschnürungszahl

$$C_v = \frac{A_v}{A_d} \quad (2.10)$$

bezeichnet. Aus der Kontinuitätsgleichung (A.10) folgt bei konstanter Dichte  $\rho$

$$q = A_1 c_1 = A_v c_v = A_d C_v c_v, \quad (2.11)$$

wobei  $q$  den Volumenstrom durch die hydraulische Drossel bezeichnet. Durch die Umformung von (2.11), durch Erweitern und mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung (2.9) ergibt sich der Volumenstrom entlang des Bernoulli-Stromfadens von ① nach ② für  $p_1 \geq p_v$  zu

$$q = A_d C_v \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{c_v^2}}} = A_d C_v \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_v)}{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_v) \frac{1}{c_v^2}}} = A_d C_v \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_v)}{1 - \left(\frac{c_1}{c_v}\right)^2}} \quad (2.12)$$

$$= A_d \underbrace{\frac{C_v}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c_v}\right)^2}}}_{C_d} \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_v)}, \quad (2.13)$$

mit dem Durchflusskoeffizient  $C_d$ . Unter der Annahme, dass bei der turbulenten Expansion von Punkt ② nach Punkt ③ die kinetische Energie der Flüssigkeit vollständig in Wärme umgewandelt wird, gilt  $p_2 \approx p_v$  [Kem12]. Somit kann die Blendengleichung formuliert werden,

$$q = A_d C_d \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p_2)} \quad \text{mit} \quad C_d = \frac{C_v}{\sqrt{1 - \left(C_v \frac{A_d}{A_1}\right)^2}}. \quad (2.14)$$

### 2.2.2 Modellierung eines 2/2-Wegeventils

Hydraulikventile können aufgrund unterschiedlicher Bauformen in Sitzventile und in Schieberventile eingeteilt werden. Letztere werden wegen ihrer geringen Betätigungskraft häufig in der Steuerung und Regelung von Hydrauliksystemen eingesetzt. Bei den kostengünstigen Sitzventilen wird der Ventilkolben in Betätigungsrichtung durch die Strömung sehr stark belastet, was für schnelle Schaltzeiten hinderlich ist. In Abbildung 2.4 sind die beiden Ventiltypen dargestellt.

Schieberventile, deren Volumenstrom proportional zum Öffnungsquerschnitt ist, werden Proportional-Schieberventile genannt. Nach DIN ISO 1219-1 werden Ventile nach Anzahl der Anschlüsse  $A$  und Anzahl der Ventilstellungen  $W$  nach folgendem Schema bezeichnet,

$$A / W - \text{Wegeventil}. \quad (2.15)$$

In diesem Abschnitt wird ein 2/2-Wegeventil – d.h. ein Ventil mit zwei Anschlüssen und zwei Ventilstellungen – betrachtet.

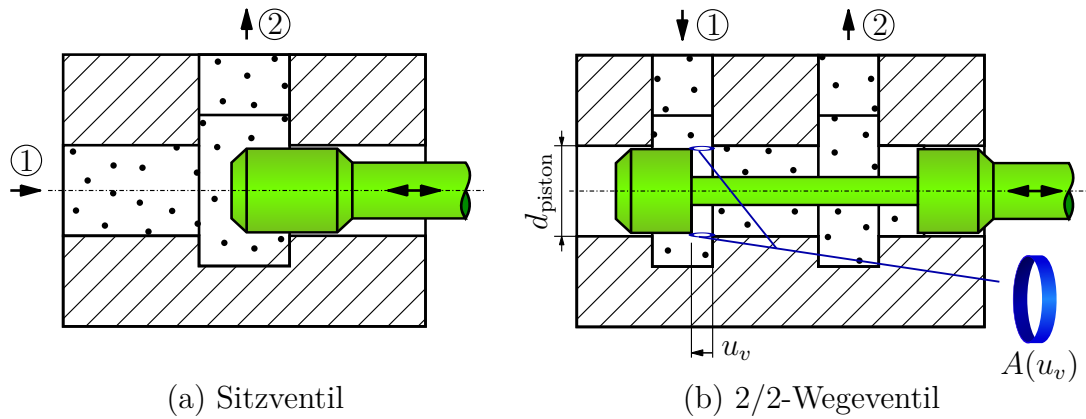


Abbildung 2.4: Bauformen verschiedener Ventile mit zwei Anschlüssen.

### Volumenstrom

Mit der sich ändernden Ventilposition  $u_v$  ändert sich die durchströmende Querschnittsfläche  $A(u_v)$  und somit auch der Volumenstrom. Dabei folgt für einen rechteckförmigen Öffnungsquerschnitt bzw. eine Mantelfläche entsprechend Abbildung 2.4(b),

$$A(u_v) = u_v d_{\text{piston}} \pi, \quad (2.16)$$

mit dem Ventilkolbendurchmesser  $d_{\text{piston}}$ . Der Volumenstrom  $q$  vom Punkt ① zum Punkt ② für ein 2/2-Wegeventil folgt aus der Blendengleichung (2.14) mit dem Druckgradienten  $\Delta p = p_1 - p_2$  und  $A_d = A(u_v)$ ,

$$q(u_v, \Delta p) = \text{sign}(\Delta p) A(u_v) C_d \sqrt{\frac{2|\Delta p|}{\rho}}. \quad (2.17)$$

Der dimensionslose Kontraktionskoeffizient  $C_d$  ist ein Maß für die Strömungseinschnürung und hängt von der Reynolds-Zahl, der Geometrie der Einlaufkante (scharfkantig oder abgerundet) und der Strömungsrichtung ab. An Steuerschiebern in Wegeventilen liegt er üblicherweise im Bereich von  $C_d = 0,6 \dots 0,8$  [FF94].

### 2.2.3 Modellierung einer hydraulische Halbbrücke (3/3-Wegeventil)

Die Kombination von zwei klassischen 2/2-Wegeventilen führt auf ein 3/3-Wegeventil. Dies wird in der Literatur auch als hydraulische Halbbrücke bezeichnet und ist in Abbildung 2.5 (oben) dargestellt. Dabei stellt (S) den Versorger-Anschluss, (A) den Arbeitsanschluss und (T) den Tank-Anschluss dar. Durch das Öffnen des Ventils in Richtung  $u_v$  wird der Arbeitsvolumenstrom  $q_A$  durch die linke Steuerkante dosiert und in umgekehrter Richtung durch die rechte Steuerkante. Anhand dieses Ventils wird im Folgenden der Begriff Überdeckung erläutert und dargestellt.

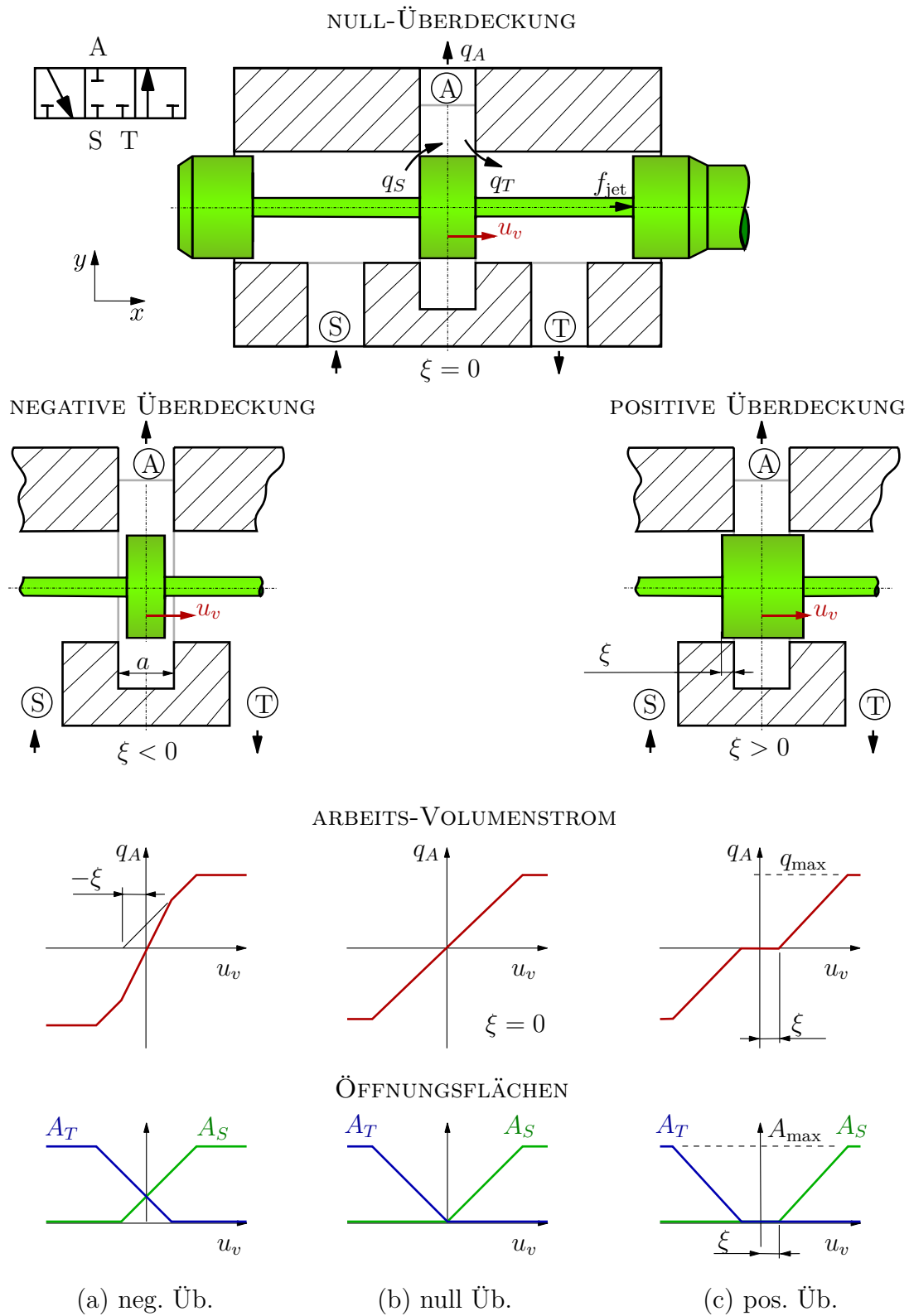


Abbildung 2.5: Durchströmung und Überdeckung eines 3/3-Wegeventils.

## Überdeckung und Ventilöffnungsflächen

Die Öffnungscharakteristik eines Ventils wird durch die sogenannte Überdeckung  $\xi$  beeinflusst, welche die halbe Differenz von Kolbenstegbreite und Breite der Nutausdehnung im Ventilgehäuse, bezeichnet als  $a$ , darstellt. Wie in Abbildung 2.5 illustriert, werden folgende Überdeckungsfälle unterschieden,

- Ventil mit Nullüberdeckung (*critical-center-Ventil*),
- Ventil mit negativer Überdeckung (*open-center-Ventil*),
- Ventil mit positiver Überdeckung (*closed-center-Ventil*).

In den Schaubildern des Volumenstroms wurde für den jeweiligen Druck vereinfacht angenommen,

$$p_T = 0 \quad p_A = \frac{p_S}{2} . \quad (2.18)$$

Somit liegt an jeder Steuerkante der gleiche Druckunterschied vor. Im Fall einer negativen Überdeckung (Abbildung 2.5(a)) kompensieren sich deshalb der Pumpenvolumenstrom  $q_S$  und der Tankvolumenstrom  $q_T$  in der Nullstellung ( $q_S = q_T$  bzw.  $q_A = 0$ ). Die durchströmten Öffnungsflächen an der linken und rechten Steuerkante des Ventils sind in Abbildung 2.5 (unten) schematisch dargestellt. Die maximale Öffnungsfläche  $A_{\max}$  ist

$$A_{\max} = a d_{\text{piston}} \pi , \quad (2.19)$$

wobei  $d_{\text{piston}}$  den Ventildurchmesser bezeichnet. Abhängig von der Größe der Überdeckung  $\xi$  und des Ventilwegs  $u_v$  lassen sich die resultierenden Öffnungsflächen berechnen. Für ein 3/3-Wegeventil mit rechteckförmigen Öffnungsquerschnitten lässt sich die Fläche  $A_S$  am Übergang von  $\textcircled{\text{S}}$  nach  $\textcircled{\text{A}}$  und die Fläche  $A_T$  am Übergang von  $\textcircled{\text{A}}$  nach  $\textcircled{\text{T}}$  durch folgende Fallunterscheidung bestimmen,

$$|u_v| \leq |\xi| \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \geq 0 \\ \xi < 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A_S = 0 \\ A_T = 0 \\ \hline A_S = (|\xi| + u_v) d_{\text{piston}} \pi \\ A_T = (|\xi| - u_v) d_{\text{piston}} \pi \end{array} \right. \quad (2.20a)$$

$$|u_v| > |\xi| \quad \left\{ \begin{array}{l} |u_v| - \xi < a \\ |u_v| - \xi \geq a \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_v < 0 \\ u_v > 0 \\ \hline u_v < 0 \\ u_v > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A_S = 0 \\ A_T = (|u_v| - \xi) d_{\text{piston}} \pi \\ \hline A_S = (|u_v| - \xi) d_{\text{piston}} \pi \\ A_T = 0 \\ \hline A_S = 0 \\ A_T = a d_{\text{piston}} \pi = A_{\max} \\ \hline A_S = a d_{\text{piston}} \pi = A_{\max} \\ A_T = 0 . \end{array} \right. \quad (2.20b)$$



Im Arbeitsbereich muss beispielsweise bei einem *closed-center*-Ventil ( $\xi > 0$ ) die positive Überdeckung erst überwunden werden ( $|u_v| > \xi$ ), bevor sich ein Volumenstrom einstellen kann. Bei einem *open-center*-Ventil ( $\xi < 0$ ) stellen sich im Bereich der Überdeckung ( $|u_v| < -\xi$ ) beide Öffnungsflächen ein. Erst nachdem die negative Überdeckung überwunden ist ( $|u_v| > -\xi$ ), stellt sich abhängig vom Vorzeichen des Ventilwegs  $u_v$  nur noch eine Öffnungsfläche ein.

## Volumenstrom

Der Arbeitsvolumenstrom  $q_A$  folgt aus der Massenerhaltung

$$q_A = q_S - q_T, \quad (2.21)$$

wobei sich der Pumpenvolumenstrom  $q_S$  und Tankvolumenstrom  $q_T$  durch die Anwendung der Blendengleichung (2.17) ergibt,

$$q_S = \text{sign}(p_S - p_A) A_S C_d \sqrt{\frac{2}{\rho} |p_S - p_A|} \quad (2.21a)$$

$$q_T = \text{sign}(p_A - p_T) A_T C_d \sqrt{\frac{2}{\rho} |p_A - p_T|}. \quad (2.21b)$$

Für die Berechnung der zugehörigen Öffnungsflächen  $A_S$  und  $A_T$  muss nach den Fällen in (2.20a) und (2.20b) unterschieden werden. Im Falle eines Ventils mit positiver Überdeckung ( $\xi > 0$ ) oder Nullüberdeckung ( $\xi = 0$ ) vereinfacht sich der Arbeitsvolumenstrom für einen Arbeitskolbenweg  $|u_v| < a$  zu

$$q_A = \begin{cases} \text{sign}(p_S - p_A) (u_v - \xi) d_{piston} \pi C_d \sqrt{\frac{2}{\rho} |p_S - p_A|} & \text{für } u_v > \xi \\ \text{sign}(p_A - p_T) (u_v - \xi) d_{piston} \pi C_d \sqrt{\frac{2}{\rho} |p_A - p_T|} & \text{für } u_v < -\xi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.22)$$

### 2.2.4 Modellierung einer hydraulische Vollbrücke (4/3-Wegeventil)

Die in der Hydraulik am häufigsten verwendete Ventilkonstruktion ist das in Abbildung 2.6 dargestellte 4/3-Wegeventil. Dieses Ventil ist eine Kombination aus zwei gekoppelten hydraulischen Halbbrücken und wird deshalb in der Literatur als die „hydraulische Vollbrücke“ bezeichnet.

Für ein 4/3-Wegeventil mit rechteckigen Öffnungsquerschnitten gelten aufgrund der mechanischen Kopplung für die Öffnungsflächen folgende Beziehungen,

$$A_2 = A_4 = A_S \quad (2.23a)$$

$$A_1 = A_3 = A_T, \quad (2.23b)$$

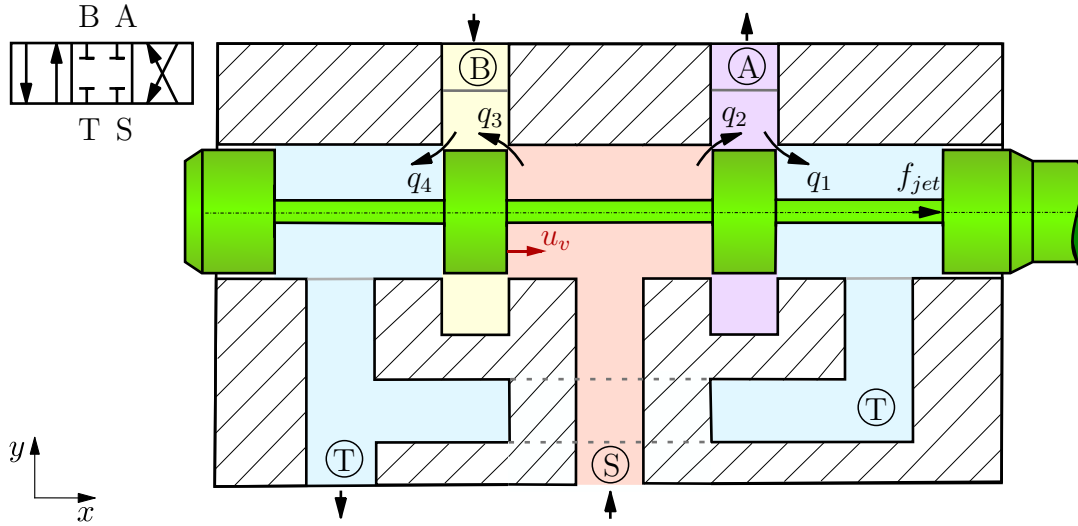


Abbildung 2.6: Durchströmung eines 4/3-Wegeventils.

wobei sich die Flächen  $A_S$  und  $A_T$  mit (2.20a) und (2.20b) berechnen lassen. Die Fläche  $A_1$  ist am Übergang von  $\textcircled{A}$  nach  $\textcircled{T}$ , die Fläche  $A_2$  am Übergang von  $\textcircled{S}$  nach  $\textcircled{A}$ , die Fläche  $A_3$  am Übergang von  $\textcircled{S}$  nach  $\textcircled{B}$  und die Fläche  $A_4$  am Übergang von  $\textcircled{B}$  nach  $\textcircled{T}$ . Mit dem Satz der Massenerhaltung folgen die Arbeitsvolumenströme

$$q_A = q_2 - q_1 \quad (2.24a)$$

$$q_B = q_4 - q_3, \quad (2.24b)$$

und aufgrund der Blendengleichung (2.17) gilt,

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{sign}(p_A - p_T) A_1(u_v) C_d \sqrt{\frac{2}{\rho} |p_A - p_T|} \\ q_2 &= \text{sign}(p_S - p_A) A_2(u_v) C_d \sqrt{\frac{2}{\rho} |p_S - p_A|} \\ q_3 &= \text{sign}(p_S - p_B) A_3(u_v) C_d \sqrt{\frac{2}{\rho} |p_S - p_B|} \\ q_4 &= \text{sign}(p_B - p_T) A_4(u_v) C_d \sqrt{\frac{2}{\rho} |p_B - p_T|}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Für ein Ventil mit Nullüberdeckung ( $\xi = 0$ ) und rechteckigen Öffnungsquerschnitten folgt mit den Annahmen  $p_S > p_A > p_T$  und  $p_S > p_B > p_T$  für die Arbeitsvolumenströme

$$q_A = u_v d_{\text{piston}} \pi C_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} \left( \sqrt{p_S - p_A} - \sqrt{p_A - p_T} \right) \quad (2.26)$$

$$q_B = -u_v d_{\text{piston}} \pi C_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} \left( \sqrt{p_S - p_B} - \sqrt{p_B - p_T} \right). \quad (2.27)$$

Ergänzend hierzu wird im Anhang in Kapitel A.5 die aus den Strömungskräften resultierende Ventilkolbenkraft für dynamische Betrachtungen hergeleitet. In dieser Arbeit wird die Dynamik des Ventilkolbens jedoch vernachlässigt.

# Kapitel 3

## Modellierung eines Hydraulikzylinders mit Ein-Massen-Schwinger

Das prinzipielle Vorgehen bei der hydraulischen Modellierung wird im Folgenden anhand eines beispielhaften Hydraulikkreises erläutert, der in Abbildung 3.1 dargestellt ist. Dieser Kreis besteht aus einem mit Hydraulikflüssigkeit gefüllten Tank, einer idealisierten Hydraulikpumpe, einem 4/3-Wegeventil und einem doppelwirkenden Hydraulikzylinder. Der Arbeitszylinder wird durch die Kraft  $f_{\text{link}}$  belastet. Die Druck- und Volumenstrom-Messgeräte charakterisieren den Strömungszustand in den Hydraulikleitungen und werden auch als ideal angesehen. Das Beispiel-Modell wird im Folgenden an einen Ein-Massen-Schwinger gekoppelt.

### 3.1 Nichtlineares Modell

Das Modell des belasteten Hydraulikkreises aus Abbildung 3.1 hat als Eingang die Stellgröße  $u_v$ , welche die Ventilposition charakterisiert. Die Pumpe fördert Hydraulikflüssigkeit aus dem Tank und stellt den konstanten Druck  $p_S$  und variablen Volumenstrom  $q_S$  bereit. Sobald das Ventil geöffnet wird, dringt das Druckmittel je nach Ventilstellung in eine der beiden Zylinderkammern ein. Gleichzeitig öffnet sich aufgrund der Ventilaufbauweise die andere Zylinderkammer, wodurch Hydraulikflüssigkeit in den Tank mit dem konstanten Druck  $p_T$  abfließen kann. Durch die Druckänderung in den Zylinderkammern resultiert eine Druckkraft  $f_{pA}$  auf den Kolben, an der die Last gekoppelt ist. Die Dynamik des Ventilkolbens wird hier vernachlässigt, da von einem sehr schnellen Ventil mit Positionsregelung ausgegangen wird.

Anhand der Zylinderkolbenposition  $x$  und der Position  $y$  der schwingenden Masse wird das Systemverhalten analysiert. Das gesamte Modell wird in *Subsysteme* aufgeteilt, die im Blockschaltbild in Abbildung 3.2 farbig dargestellt sind. In den Blöcken mit der Bezeichnung

- *Hydraulikzylinder mechanisches Modell* und
- *Kraft in der Kolbenstange*

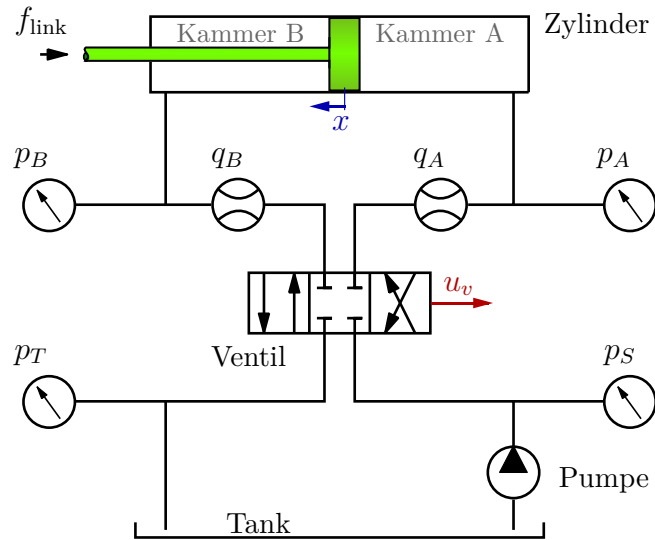


Abbildung 3.1: Beispiel eines Hydraulikkreises.

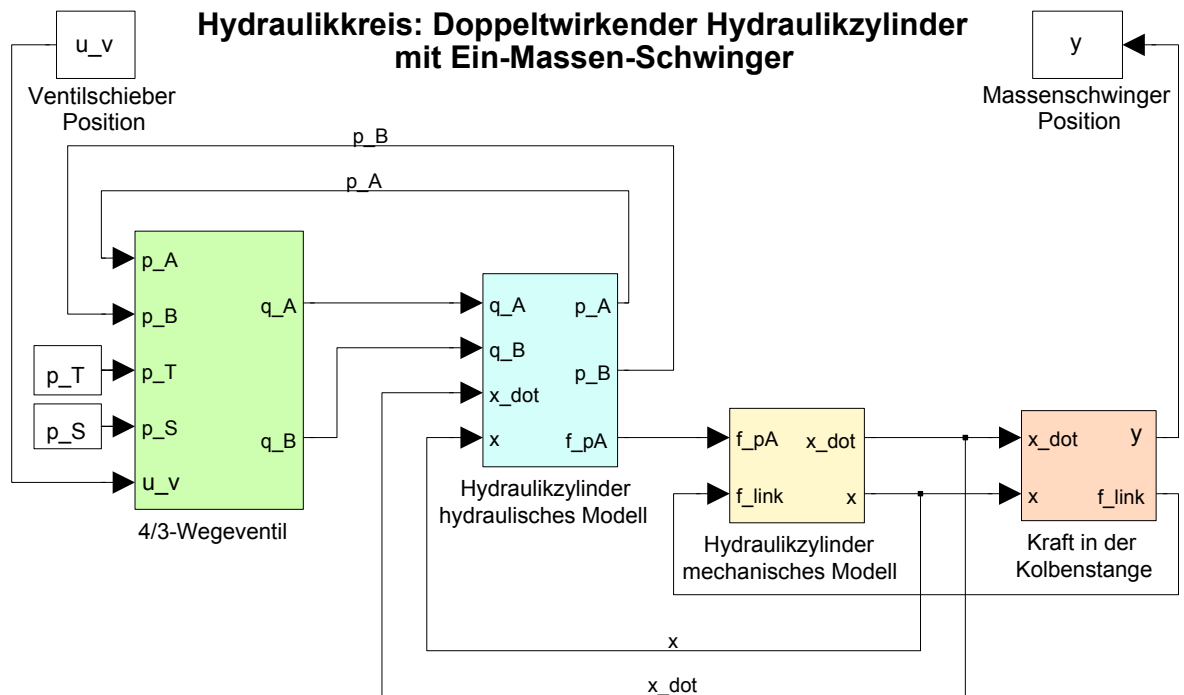


Abbildung 3.2: Blockschaltbild des Modells eines Hydraulikzylinders mit Ein-Massen-Schwinger.

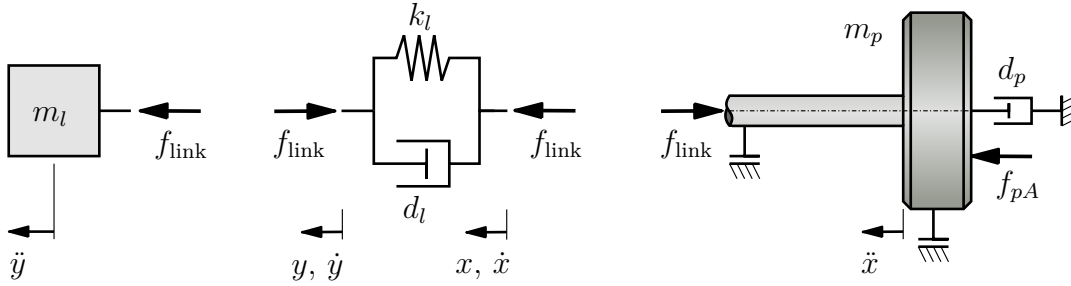


Abbildung 3.3: Mechanisches Modell des doppelwirkenden Hydraulikzylinders mit angekoppeltem Ein-Massen-Schwinger.

wird das mechanische Systemverhalten und in den Blöcken mit der Bezeichnung

- *Hydraulikzylinder hydraulisches Modell* und
- *4/3-Wegeventil*

das hydraulische Systemverhalten modelliert. Die Kraft  $f_{\text{link}}$  in der Kolbenstange realisiert die mechanische Kopplung des Ein-Massenschwingers mit dem Hydraulikzylinder. Nach dem Impulssatz ergibt sich für das mechanische Modell des Zylinderkolbens aus Abbildung 3.3 die Bewegungsgleichung

$$m_p \ddot{x} = f_{pA} - f_{\text{link}} - d_p \dot{x} . \quad (3.1)$$

Die viskose Dämpfung der Kolbenlagerung wird mit  $d_p$  und die Masse des Kolbens mit  $m_p$  bezeichnet. Die Kraft  $f_{\text{link}}$  ist die Schnittstelle zur allgemein formulierten Last, die sich in diesem Beispiel durch das *Feder-Dämpfer-Kopplungselement* berechnen lässt,

$$f_{\text{link}} = k_l(x - y) + d_l(\dot{x} - \dot{y}) , \quad (3.2)$$

wobei die Feder für  $x = y = 0$  entspannt ist. Außerdem ergibt sich am Massenschwinger die Impulsbilanz zu

$$m_l \ddot{y} = f_{\text{link}} . \quad (3.3)$$

Das hydraulische Modell des Arbeitszylinders folgt aus den Druckdifferentialgleichungen für die Kammer A (2.6) und für die Kammer B (2.7), wobei alle Leckageströme vernachlässigt werden,

$$\frac{dp_A}{dt} = \frac{\beta}{(V_{0A} + A_A x)} (q_A - A_A \dot{x}) \quad \text{und} \quad (3.4)$$

$$\frac{dp_B}{dt} = \frac{\beta}{(V_{0B} - A_B x)} (-q_B + A_B \dot{x}) . \quad (3.5)$$

Die Kolbenflächen werden mit  $A_A$  und  $A_B$ , die in die Kammern fließenden Volumenströmen mit  $q_A$  und  $q_B$  und das Kompressionsmodul mit  $\beta$  bezeichnet. Die Anfangsvolumina  $V_{0A}$  und  $V_{0B}$  setzen sich aus dem Ölvolumen der Zuleitung, dem Totvolumen des

Hydraulikzylinders und dem Hubvolumenanteil in Abhängigkeit der Kolbenposition zusammen. Die Anfangsdrücke werden mit Hilfe von (3.1) für das statische Gleichgewicht ( $\ddot{x} = 0$  und  $\dot{x} = 0$ ) bestimmt,

$$\begin{aligned}
 0 &= f_{pA0} - f_{\text{link}0} \\
 &\stackrel{(2.2)}{=} p_{A0}A_A - p_{B0}A_B - f_{\text{link}0} + f_{\text{stab}} - f_{\text{stab}} \\
 &= \underbrace{p_{A0}A_A - f_{\text{link}0} - f_{\text{stab}}}_{\stackrel{!}{=}0} - \underbrace{p_{B0}A_B + f_{\text{stab}}}_{\stackrel{!}{=}0} \\
 \Rightarrow p_{A0} &= \frac{f_{\text{stab}} + f_{\text{link}0}}{A_A} \quad \text{und} \quad \Rightarrow p_{B0} = \frac{f_{\text{stab}}}{A_B}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\tag{3.7}$$

Die Kraft  $f_{\text{stab}}$  ist eine durch die Drücke hervorgerufene Kraft, die jeder Zeit stabilisierend auf den Zylinderkolben von beiden Seiten wirkt. Mit Hilfe dieser Kraft werden die Anfangsdrücke abgeschätzt.

Im letzten Schritt wird das 4/3-Wegeventil modelliert. Die Drücke in den angeschlossenen Leitungen sind entscheidend für die Berechnung der Arbeitsvolumenströme  $q_A$  und  $q_B$ , die in die Zylinderkammern fließen. Deshalb werden die Kammerdrücke  $p_A$  und  $p_B$  in das Ventil-Subsystem zurückgeführt. Die Berechnung der effektiven Öffnungsflächen des Ventils entsprechend Gleichungen (2.20a) und (2.20b) kann z.B. durch Logik-Verzweigungen realisiert werden. Die Ventilkräfte werden vernachlässigt. Das Modell wird von nun an mit  $\Sigma$  bezeichnet.

## 3.2 Lineares Modell

In Kapitel 3.1 wurden die Gleichungen des Hydraulikkreises hergeleitet und modelliert. Mit Hilfe dieser Modellierung lässt sich das System sehr gut physikalisch deuten und anschaulich darstellen. Für eine Systemanalyse im Frequenzbereich wird im Folgenden ein lineares, zeitinvariantes System hergeleitet, das das Systemverhalten an einem Arbeitspunkt in guter Näherung wiedergibt. Hierzu werden nichtlineare Zusammenhänge linearisiert und die Differentialgleichungen in Übertragungsfunktionen im Frequenzbereich transformiert.

Durch Linearisieren des Lastvolumenstroms  $q_L$  eines 4/3-Wegeventils, welches einen doppeltwirkenden Hydraulikzylinder steuert, ergibt sich [Mer67]

$$q_L = K_q u_v - K_c p_L, \quad \text{mit} \tag{3.8}$$

$$q_L = \frac{q_A + q_B}{2} \quad \text{und} \tag{3.8a}$$

$$p_L = p_A - p_B \quad \text{bzw.} \quad \dot{p}_L = \dot{p}_A - \dot{p}_B. \tag{3.8b}$$

Hierbei ist der Druck in den Zylinderkammern A und B mit  $p_A$  und  $p_B$ , der Volumenstrom in den Zylinderkammern mit  $q_A$  und  $q_B$ , die Ventilposition mit  $u_v$  und der Lastdruck mit  $p_L$  bezeichnet. Außerdem ist  $K_q$  als die *wegbezogene Flussverstärkung* und

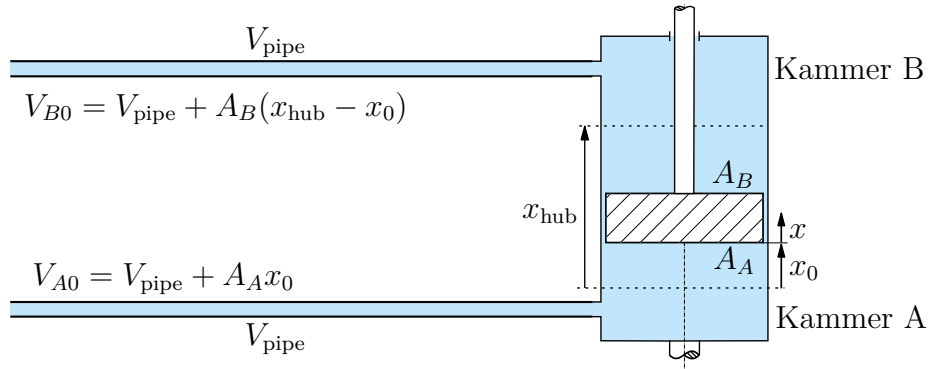


Abbildung 3.4: Volumen der belasteten Flüssigkeit im Hydraulikkreis.

$K_c$  als *Druckdurchflusskoeffizient* definiert. Diese lassen sich mit dem Pumpendruck  $p_S$  und der druckrelevanten Ventilöffnung  $u_{vp}$  wie folgt abschätzen [Man05], [Mer67],

$$K_q \approx d_{\text{piston}} \pi C_d \sqrt{\frac{p_S}{\rho}}, \quad (3.9a)$$

$$K_c \approx \frac{d_{\text{piston}} \pi u_{vp} C_d}{\sqrt{p_S \rho}}. \quad (3.9b)$$

Unter der vereinfachten Annahme von identischen Anfangsvolumina  $V_{0A} = V_{0B} = V_t/2$  und Kolbenflächen  $A_A = A_B = A_k$  lässt sich der Lastvolumenstrom  $q_L$  durch das Einsetzen der Druckaufbaugleichungen im Hydraulikzylinder (3.4) und (3.5) in (3.8a) formulieren,

$$\begin{aligned} q_L &= \frac{q_A + q_B}{2} \\ &= A_k \dot{x} + \frac{V_t/2 + A_k x}{2\beta} \dot{p}_A - \frac{V_t/2 - A_k x}{2\beta} \dot{p}_B \\ &= A_k \dot{x} + \frac{V_t}{4\beta} \underbrace{(\dot{p}_A - \dot{p}_B)}_{\dot{p}_L} + \frac{A_k x}{2\beta} (\dot{p}_A - \dot{p}_B), \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei der letzte Term aufgrund der Annahme  $A_k x \ll V_t/2$  vernachlässigt werden kann. Das gesamte Volumen der belasteten Flüssigkeit im Hydraulikkreis ist in Abbildung 3.4 dargestellt und es gilt vereinfacht  $V_t = 2V_{\text{pipe}} + A_k x_{\text{hub}}$ . Mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,  $p_L(0) = 0$  und durch die *Laplace*-Transformation ergibt sich

$$Q_L(s) = A_k s X(s) + \frac{V_t s}{4\beta} P_L(s). \quad (3.11)$$

Die Bewegungsgleichung (3.1) des Zylinderkolbens kann unter Berücksichtigung der Vereinfachungen umgeformt und auch in den *Laplace*-Bereich transformiert werden.

Hierfür folgt mit (2.2),

$$m_p \ddot{x} = p_A A_k - p_B A_k - f_{\text{link}} - d_p \dot{x} \quad (3.12a)$$

$$\stackrel{(3.8b)}{=} p_L A_k - f_{\text{link}} - d_p \dot{x} \quad (3.12b)$$

$$\Rightarrow P_L(s) = \frac{1}{A_k} \left( m_p X(s) s^2 + d_p X(s) s + f_{\text{link}} \right) . \quad (3.12c)$$

Durch das Gleichsetzen von (3.8) und (3.11) und durch die Verwendung des Lastdrucks (3.12c) kann das Übertragungsverhalten von Ventilposition  $u_v$  und Last  $f_{\text{link}}$  auf die Zylinderkolbenposition  $x$  hergeleitet werden,

$$K_q U_v(s) - K_c P_L(s) = A_k X(s) s + \frac{V_t}{4\beta} P_L(s) s \quad (3.13)$$

$$K_q U_v(s) - A_k X(s) s = \frac{1}{A_k} \left( m_p X(s) s^2 + d_p X(s) s + f_{\text{link}} \right) \left( \frac{V_t}{4\beta} s + K_c \right) \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{\frac{K_q}{A_k} U_v(s) - \frac{1}{A_k^2} \left( \frac{V_t}{4\beta} s + K_c \right) f_{\text{link}}}{\frac{V_t m_p}{4\beta A_k^2} s^3 + \left( \frac{K_c m_p}{A_k^2} + \frac{d_p V_t}{4\beta A_k^2} \right) s^2 + \left( 1 + \frac{d_p K_c}{A_k^2} \right) s} . \quad (3.15)$$

Da gilt  $d_p K_c / A_k^2 \ll 1$ , kann dieser Term vernachlässigt werden [Mer67]. Durch diese Vereinfachung bekommt der Nenner die Struktur eines  $PT2$ -Gliedes mit zusätzlichem Integrator [Lun10]. Dies führt zur Darstellung,

$$X(s) = \underbrace{\frac{K_q 4\beta A_k}{V_t m_p}}_{G_{xu}(s)} U_v(s) - \underbrace{\frac{\left( \frac{V_t}{4\beta} s + K_c \right) \frac{4\beta}{V_t m_p}}{\left( s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2 \right) s}}_{G_{xf}(s)} f_{\text{link}} , \quad (3.16)$$

mit der ungedämpften Eigenfrequenz  $\omega_0$  und dem Lehr'schen Dämpfungsmaß  $D$ ,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\beta A_k^2}{V_t m_p}} \quad \text{und} \quad D = \frac{K_c}{A_k} \sqrt{\frac{\beta m_p}{V_t}} + \frac{d_p}{4A_k} \sqrt{\frac{V_t}{\beta m_p}} . \quad (3.17)$$

Die Übertragungsfunktionen  $G_{xu}(s)$  und  $G_{xf}(s)$  beschreiben den jeweiligen Einfluss der Eingangsgrößen auf die Zylinderkolbenposition. Die Eigenfrequenz des gedämpften Systems ergibt sich zu

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} . \quad (3.18)$$

Die ungedämpfte Eigenfrequenz hängt vor allem von dem Gesamtvolumen der belasteten Flüssigkeit  $V_t$  und dem Kompressionsmodul  $\beta$  ab. Eine Verlängerung der Hydraulikschläuche oder die Verwendung eines Hydrauliköls mit höherer Kompressibilität würde demnach die Eigenfrequenz senken und somit würde sich das System elastischer verhalten. Das Lehr'sche Dämpfungsmaß charakterisiert die Dämpfung im System und



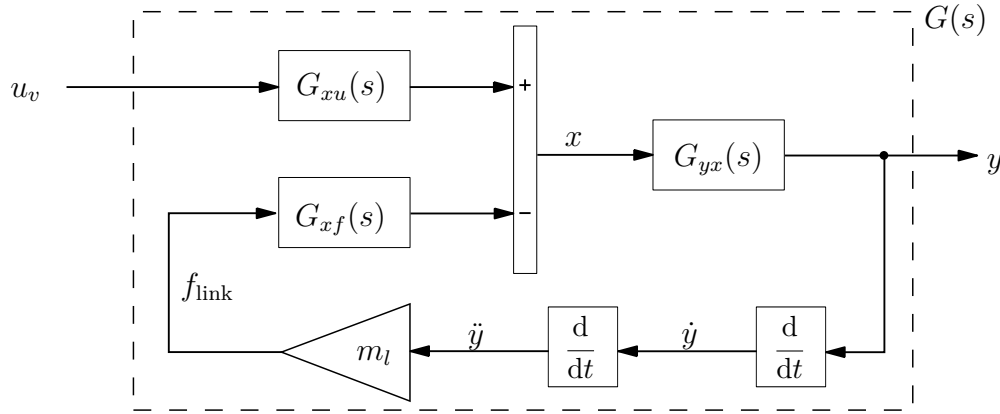


Abbildung 3.5: Linearisiertes-Modell des doppelt wirkenden Hydraulikzylinders mit angekoppeltem Ein-Massen-Schwinger.

hängt vor allem von der viskosen Dämpfung im Hydraulikzylinder  $d_p$  ab, da sich der Druckdurchflusskoeffizient in der Größenordnung  $K_c \approx 1 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{Pa s}$  befindet.

Die Position  $y$  der Masse  $m_l$  folgt aus der Impulsbilanz (3.2) bzw. (3.3),

$$m_l \ddot{y} + d_l \dot{y} + k_l y = k_l x + d_l \dot{x} . \quad (3.19)$$

Im Frequenzbereich ergibt sich daraus die Übertragungsfunktion  $G_{yx}(s)$  zu

$$Y(s) = \underbrace{\frac{d_l s + k_l}{m_l s^2 + d_l s + k_l}}_{G_{yx}(s)} X(s) . \quad (3.20)$$

Mit Gleichung (3.3) und durch das zweifache Ableiten von  $y$  kann die Last  $f_{\text{link}}$  berechnet werden. Das Übertragungsverhalten der Ventilposition  $u_v$  auf die Massenschwingerposition  $y$  ist in Abbildung 3.5 dargestellt und lässt sich als die Übertragungsfunktion  $G(s)$  des Gesamtsystems  $\Sigma_{\text{lin}}$  formulieren,

$$Y(s) = G_{yx} (G_{xu} U_v(s) - G_{xf} m_l Y(s) s^2) \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{G_{yx} G_{xu}}{1 + G_{yx} G_{xf} m_l s^2}}_{G(s)} U_v(s) . \quad (3.22)$$

Der relative Grad  $r$  der linearen Übertragungsfunktion  $G(s)$  berechnet sich aus der Anzahl  $n_P$  der Pole und der Anzahl  $n_{NS}$  der Nullstellen mit

$$r = n_P - n_{NS} . \quad (3.23)$$

Für  $r \geq 0$  wird ein System als realisierbar bezeichnet [Lun10]. Aus (3.22) lässt sich mit (3.23) der relative Grad des betrachteten Systems für den späteren Entwurf einer Vorsteuerung ermitteln. Für den relativen Grad von  $G(s)$  ergibt sich  $r = 4$ .

### 3.2.1 Analyse des linearen und nichtlinearen Modells

In diesem Kapitel werden die Simulationsergebnisse des nichtlinearen Modells  $\Sigma$  und des linearen Modells  $\Sigma_{\text{lin}}$  analysiert und verglichen. Hierfür wird das 4/3-Wegeventil mit der Ventilkolbenposition  $u_v$  für einen kurzen Zeitraum in positiver Richtung und anschließend in negativer Richtung geöffnet. Dadurch bewegt sich der Arbeitskolben des Hydraulikzylinders zuerst in positive und anschließend in negative Richtung. Es ist zu erwarten, dass der Ein-Massen-Schwinger mit der Position  $y$  aufgrund der mechanischen Koppelung dynamisch angeregt und mit fortschreitender Zeit gedämpft wird. Die verwendeten Simulationsparameter sind im Anhang in Tabelle C.1 aufgelistet.

Für das lineare Modell werden noch zusätzlich die Parameter entsprechend Tabelle C.2 bestimmt. Da die wegbezogene Flussverstärkung  $K_q$  einen wesentlichen Einfluss auf das Modell hat und zunächst nur abgeschätzt werden kann, wird diese anhand der Simulationsergebnisse des nichtlinearen Modells bestimmt. In Tabelle C.3 sind die verwendeten Parameter zur Berechnung der numerischen Lösung aufgeführt. Die geometrischen Daten des Hydraulikzylinders sind dem Arbeitszylinder der Leiterhydraulik entnommen und alle anderen Daten wurden beispielhaft aus Erfahrungswerten in der Literatur gewählt.

Das Resultat der Simulation ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Die wegbezogene Flussverstärkung wird auf den Wert

$$K_q = 3.83 \text{ m}^2/\text{s} \quad (3.24)$$

angepasst, so dass das Modellverhalten beim Öffnen des Ventils in positive Richtung sehr gut übereinstimmt. Es ist gut zu erkennen, dass beim Öffnen des Ventils in negativer Richtung die Ergebnisse der Zylinderposition  $x$  und somit auch der Massenschwingerposition  $y$  stark voneinander abweichen. Während das lineare Modell  $\Sigma_{\text{lin}}$  unabhängig von der Ventilöffnungsrichtung ist, wird beim nichtlinearen System  $\Sigma$  der Volumenstrom bei positiver Ventilauslenkung in Abhängigkeit der Druckgradienten  $p_S - p_A$  und  $p_B - p_T$  bzw.  $p_S - p_B$  und  $p_A - p_T$  bei negativer Ventilauslenkung berechnet. Das lineare Modell  $\Sigma_{\text{lin}}$  ist allerdings nur abhängig von dem Druckgradienten  $p_L = p_A - p_B$ . Somit resultiert in beide Richtungen die gleiche Zylinderpositionsänderung  $x$ .

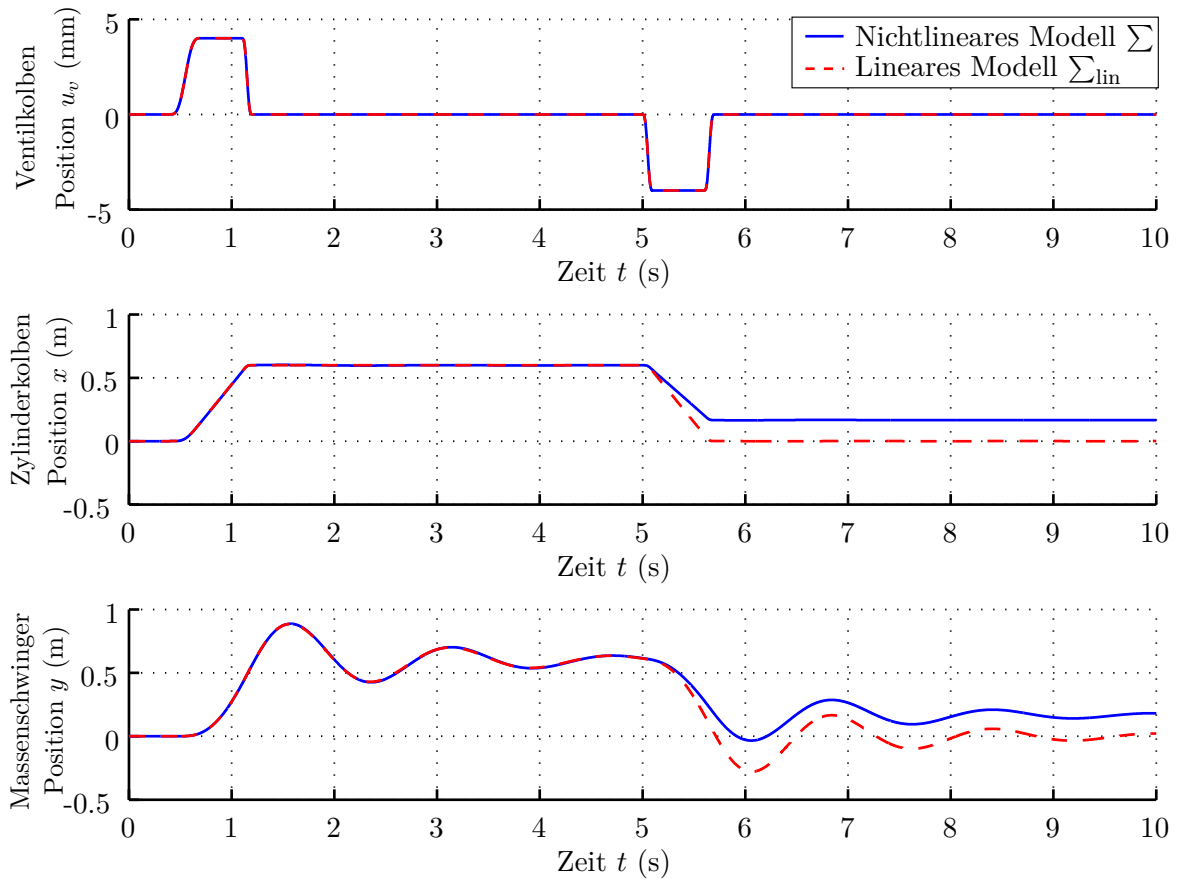


Abbildung 3.6: Vergleich der Simulationsergebnisse des nichtlinearen Modells  $\Sigma$  und des linearen Modells  $\Sigma_{\text{lin}}$ .



# Kapitel 4

## Modellierung einer hydraulischen Drehleiter

Das folgende Kapitel beschreibt die Modellierung und Identifikation der IVECO MAGIRUS M60L Feuerwehdrehleiter mit 60 m Arbeitshöhe, die in Abbildung 4.1 dargestellt ist. Für dieses Fahrzeug wurden im Rahmen des Forschungsprojektes „*Aktive Schwingungsdämpfung für Feuerwehdrehleitern*“ am Institut für Systemdynamik bereits viele Messdaten aufgezeichnet.

In diesem Kapitel wird ein mechanisch-hydraulisch gekoppeltes Modell entworfen, welches das Verhalten der Drehleiterhydraulik sehr genau charakterisiert. Zunächst werden die kinematischen und kinetischen Zusammenhänge des mechanischen Modells hergeleitet und anschließend das hydraulische Modell des Drehleiter-Hydraulikkreises vorgestellt. Anhand der vorliegenden Messergebnisse werden dann die unbekannt Parameter und Kennlinien des Modells identifiziert. In Kapitel 4.3 wird ein lineares Modell des hydraulischen Antriebs der Feuerwehreiter aus Ergebnissen von Kapitel 3.2 hergeleitet. Anschließend werden die Simulationsergebnisse des nichtlinearen und linearen Modells mit den Messdaten verglichen.

### 4.1 Modellbildung

Die Feuerwehreiter wird durch zwei baugleiche, doppelt wirkende Hydraulikzylinder aufgerichtet und geneigt. In dieser Arbeit werden dynamische Modelle hergeleitet, die jeweils einen der beiden Arbeitszylinder berücksichtigen. Dabei wird angenommen, dass sich die Last gleichmäßig auf beide Hydraulikzylinder verteilt.

#### 4.1.1 Mechanisches Modell

Im mechanischen Modell wird die Dynamik des Hydraulikzylinderkolbens mit der gekoppelten Last der Drehleiter betrachtet. Die Dynamik des Ventils wird vernachlässigt. Im Folgenden wird die Kinematik und Kinetik für das Aufrichten und Neigen der Feuerwehreiter hergeleitet. Alle relevanten Größen sind in Abbildung 4.2 dargestellt.



Abbildung 4.1: Darstellung der IVECO MAGIRUS M60L Feuerwehdrehleiter. Quelle: *Iveco Magirus Brandschutztechnik GmbH*.

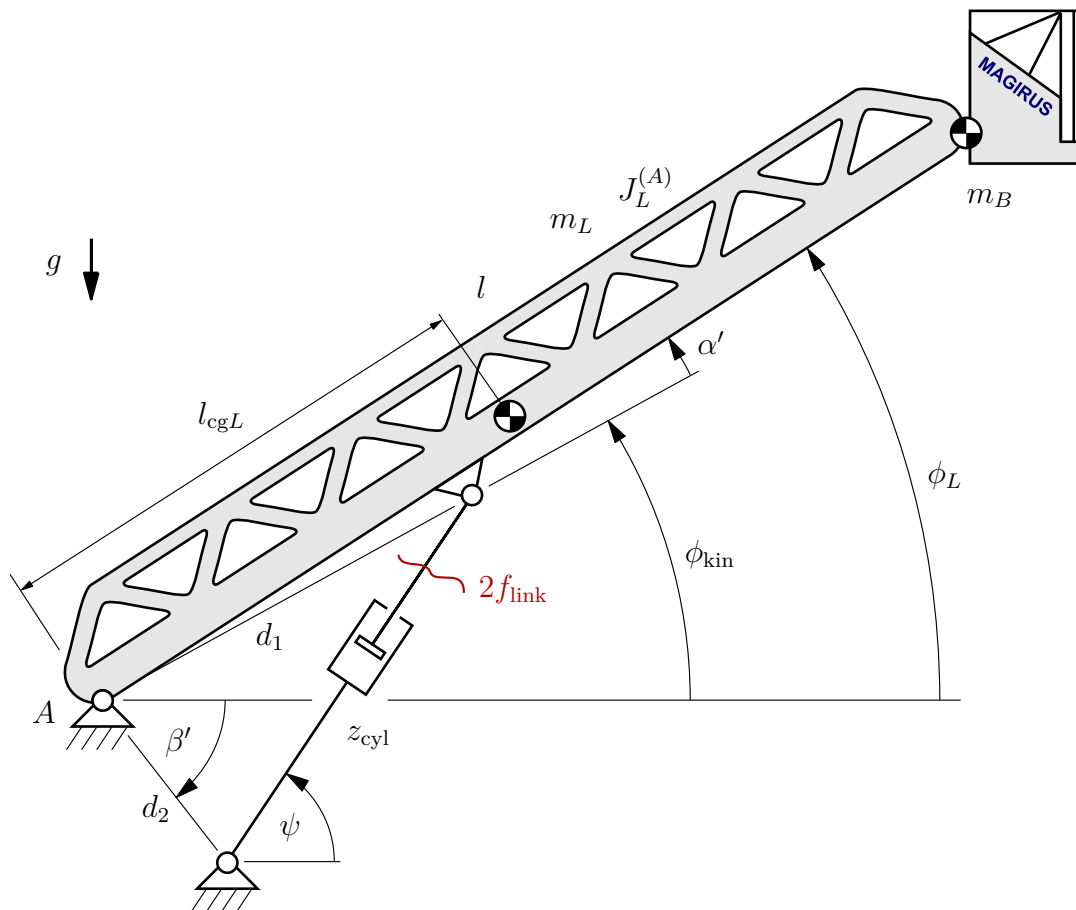


Abbildung 4.2: Kinematik-Modell der Feuerwehdrehleiter.

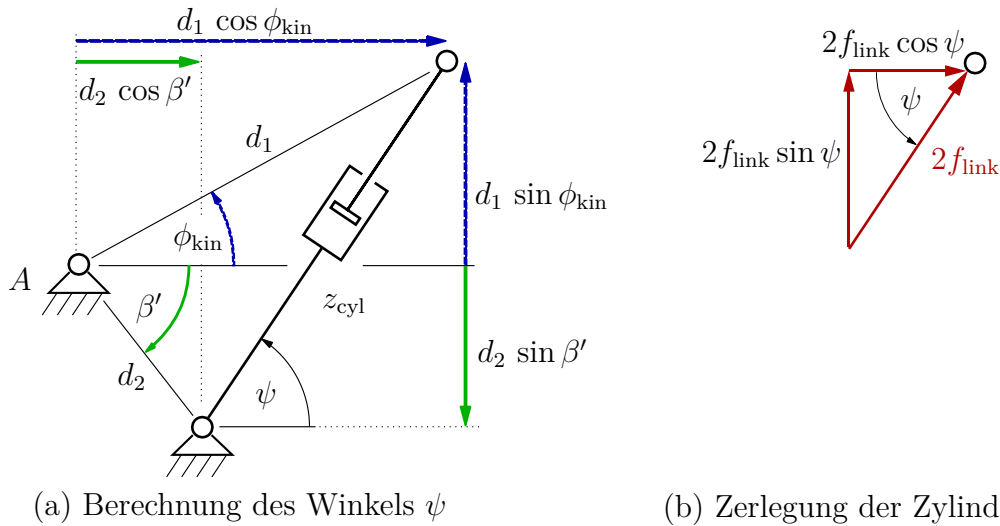


Abbildung 4.3: Berechnung der Verkippung des Hydraulikzylinders gegen die Horizontale.

### Kinematik

Mit dem Leiterwinkel  $\phi_L$  gegenüber der Horizontalen und dem konstruktionsbedingten Winkel  $\alpha'$  gelten für den Winkel  $\phi_{\text{kin}}$  der Zylinderkinematik die Beziehungen

$$\phi_{\text{kin}} = \phi_L - \alpha', \quad \dot{\phi}_{\text{kin}} = \dot{\phi}_L \quad \text{und} \quad \ddot{\phi}_{\text{kin}} = \ddot{\phi}_L. \quad (4.1)$$

Der Winkel  $\beta'$  geht ebenso aus der Konstruktion hervor und zeigt in mathematisch negativer Drehrichtung, deshalb gilt  $\beta' < 0$ . Die Verkippung des Hydraulikzylinders gegenüber der Horizontalen ist in Abbildung 4.3 dargestellt und ergibt sich zu

$$\psi = \arctan \left( \frac{d_1 \sin \phi_{\text{kin}} - d_2 \sin \beta'}{d_1 \cos \phi_{\text{kin}} - d_2 \cos \beta'} \right). \quad (4.2)$$

Die Längen  $d_1$  und  $d_2$  sind konstante Abstände zwischen den Drehgelenken. Für die Gesamtlänge  $z_{\text{cyl}}$  des Hydraulikzylinders und den Winkel  $\phi_{\text{kin}}$  der Zylinderkinematik ergeben sich mit dem Kosinussatz die Zusammenhänge [PS11]

$$z_{\text{cyl}} = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2 d_1 d_2 \cos(\phi_{\text{kin}} - \beta')} \quad (4.3a)$$

$$\Leftrightarrow \phi_{\text{kin}} = \arccos \left( \frac{d_1^2 + d_2^2 - z_{\text{cyl}}^2}{2 d_1 d_2} \right) + \beta'. \quad (4.3b)$$

Durch Ableiten von (4.3a) nach der Zeit, folgt die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}_{\text{kin}}$

$$z_{\text{cyl}} \dot{z}_{\text{cyl}} = d_1 d_2 \dot{\phi}_{\text{kin}} \sin(\phi_{\text{kin}} - \beta') \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}_{\text{kin}} = \frac{z_{\text{cyl}} \dot{z}_{\text{cyl}}}{d_1 d_2 \sin(\phi_{\text{kin}} - \beta')}. \quad (4.4)$$

Die Winkelbeschleunigung  $\ddot{\phi}_{\text{kin}}$  lässt sich berechnen, indem (4.4) ein weiteres Mal nach der Zeit abgeleitet wird

$$\dot{z}_{\text{cyl}}^2 + z_{\text{cyl}} \ddot{z}_{\text{cyl}} = d_1 d_2 \ddot{\phi}_{\text{kin}} \sin(\phi_{\text{kin}} - \beta') + d_1 d_2 \dot{\phi}_{\text{kin}}^2 \cos(\phi_{\text{kin}} - \beta') \quad (4.5)$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi}_{\text{kin}} = \frac{\dot{z}_{\text{cyl}}^2 + z_{\text{cyl}} \ddot{z}_{\text{cyl}} - d_1 d_2 \dot{\phi}_{\text{kin}}^2 \cos(\phi_{\text{kin}} - \beta')}{d_1 d_2 \sin(\phi_{\text{kin}} - \beta')}. \quad (4.6)$$

## Kinetik

Mit dem Drallsatz der technischen Mechanik gilt für den Gesamtdrehimpuls  $L^{(A)}$  und die Summe aller Drehmomente  $M^{(A)}$  um den Auflagerpunkt  $A$  die Beziehung

$$\frac{dL^{(A)}}{dt} = \sum M^{(A)} . \quad (4.7)$$

Das Trägheitsmoment der Leiter bezüglich  $A$  wird mit  $J_L^{(A)}$  bezeichnet. Durch die Betrachtung des Korbes als Punktmasse  $m_B$  und die Zerlegung der Zylinderkraft  $f_{\text{link}}$  gemäß Abbildung 4.3(b), ergibt sich mit dem Additionstheorem

$$\sin(\psi - \phi_{\text{kin}}) = \sin \psi \cos \phi_{\text{kin}} - \cos \psi \sin \phi_{\text{kin}} \quad (4.8)$$

der Drallsatz zu

$$(J_L^{(A)} + m_B l^2) \ddot{\phi}_L = 2f_{\text{link}} d_1 \sin(\psi - \phi_{\text{kin}}) - (m_L l_{\text{cg}L} + m_B l) g \cos \phi_L . \quad (4.9)$$

Mit Gleichung (4.1) lässt sich die Kraft auf den Hydraulikzylinder in Abhängigkeit des Leiterwinkels  $\phi_L$  herleiten,

$$f_{\text{link}} = \frac{(J_L^{(A)} + m_B l^2) \ddot{\phi}_L + (m_L l_{\text{cg}L} + m_B l) g \cos \phi_L}{2d_1 \sin(\psi - \phi_L + \alpha')} , \quad (4.10)$$

wobei  $m_L$  die Masse der Leiter bezeichnet. Die Schwerpunktslagen werden durch  $l_{\text{cg}L}$  und der Leiterlänge  $l$  beschrieben. Der Faktor 2 berücksichtigt die Betrachtung von nur einem Hydraulikzylinder. In der Simulation setzt sich die aktuelle Zylinderlänge aus der eingefahrenen Zylinderlänge  $z_{\text{cyl},\text{min}}$  und der Kolbenposition  $x$  zusammen,

$$z_{\text{cyl}} = z_{\text{cyl},\text{min}} + x, \quad \dot{z}_{\text{cyl}} = \dot{x} \quad \text{und} \quad \ddot{z}_{\text{cyl}} = \ddot{x} . \quad (4.11)$$

Durch die Kombination von (4.1), (4.3b), (4.10) und (4.11) lässt sich die Kraft in der Kolbenstange  $f_{\text{link}}$  somit in Abhängigkeit von der Kolbenposition  $x$  und Kolbenbewegung  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$  berechnen.

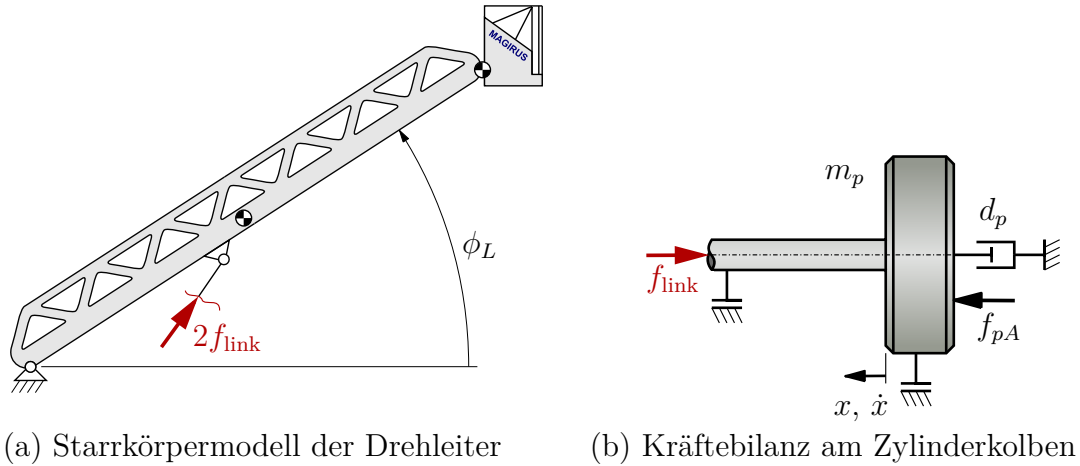
Die Bewegungsgleichung des Zylinders ergibt sich mit Hilfe von Abbildung 4.4 durch das Freischneiden des Zylinderkolbens. Mit dem Impulssatz folgt

$$m_p \ddot{x} = f_{pA} - f_{\text{link}} - d_p \dot{x} . \quad (4.12)$$

Äquivalent zu Kapitel 3.1 beschreibt  $d_p$  die viskose Dämpfung der Kolbenlagerung und  $f_{pA}$  die resultierende Druckkraft auf den Zylinderkolben, die sich nach (2.2) berechnen lässt. Die Bewegungsgleichung des mechanischen Modells kann somit in Abhängigkeit der Kolbenposition  $x$ , Kolbengeschwindigkeit  $\dot{x}$  und Kolbenbeschleunigung  $\ddot{x}$  dargestellt werden,

$$\left( m_p + \frac{\zeta_1}{\zeta_3(x)} \frac{z_{\text{cyl}}}{\zeta_5(x)} \right) \ddot{x} = f_{pA}(x, \dot{x}) - \frac{\zeta_1}{\zeta_3(x)} \frac{\zeta_4(x, \dot{x})}{\zeta_5(x)} - \frac{\zeta_2(\dot{x})}{\zeta_3(x)} - d_p \dot{x} \quad (4.13)$$





(a) Starrkörpermodell der Drehleiter

(b) Kräftebilanz am Zylinderkolben

Abbildung 4.4: Mechanisches Gesamtmodell der Feuerwehrleiter.

$$\text{mit } \zeta_1 = J_L^{(A)} + m_B l^2 \quad (4.13a)$$

$$\zeta_2(\dot{x}) = (m_L l_{cgL} + m_B l) g \cos \phi_L \quad (4.13b)$$

$$\zeta_3(x) = 2 d_1 \sin[\psi(x) - \phi_L(x) + \alpha'] \quad (4.13c)$$

$$\zeta_4(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 - d_1 d_2 \dot{\phi}_{kin}(x, \dot{x})^2 \cos(\phi_{kin}(x) - \beta') \quad (4.13d)$$

$$\zeta_5(x) = d_1 d_2 \sin(\phi_{kin}(x) - \beta') . \quad (4.13e)$$

### Trägheitsmoment der Leiter

Die reale Feuerwehrleiter besteht aus sechs Leiterteilen die im Folgenden zum Berechnen des Trägheitsmoments betrachtet werden. Hierzu wird vereinfacht angenommen, dass ein Leiterteil aus einem quaderförmigen homogenen Starrkörper besteht. Rotiert ein Quader mit der Masse  $m$ , der Höhe  $h$  und der Länge  $l$  um seine Trägheitsachse bzw. seinen Schwerpunkt, so lautet das Trägheitsmoment

$$J^{(cg)} = \frac{1}{12} m(h^2 + l^2) . \quad (4.14)$$

Falls die Drehachse bzw. der Schwerpunkt um den Punkt  $P = [0 \ a \ b]^T$  verschoben wird, ergibt sich das Trägheitsmoment mit dem *Satz von Steiner* zu

$$J^{(P)} = J^{(cg)} + m(a^2 + b^2) . \quad (4.15)$$

Die Zusammenhänge sind in Abbildung 4.5 illustriert. Sind die Längen, Masse und Schwerpunktlagen der Leiterteile bekannt, lässt sich das Gesamtträgheitsmoment der eingefahrenen Leiter bezüglich des Lagerpunktes  $A$  unter Berücksichtigung aller Leiterteile berechnen,

$$J_L^{(A)} = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{12} m_i (h_i^2 + l_i^2) + m_i (a_i^2 + b_i^2) . \quad (4.16)$$

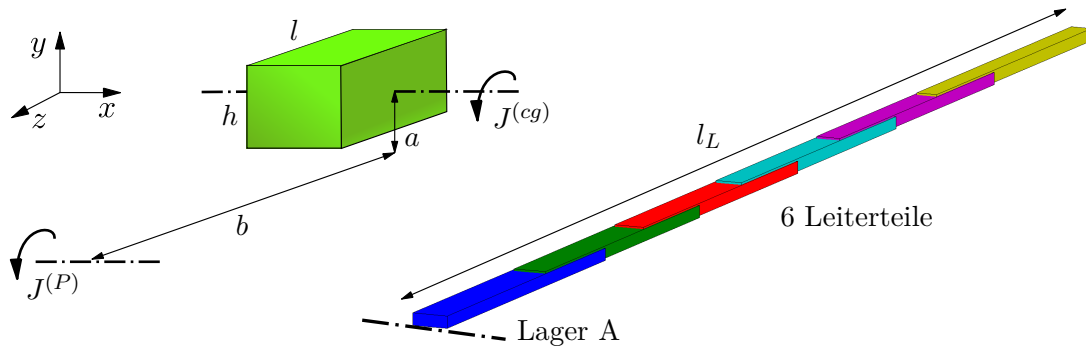


Abbildung 4.5: Trägheitsmoment des Leitersatzes.

### 4.1.2 Hydraulisches Modell

Das hydraulische Modell des Drehleiterantriebes ist – bis auf die Modellierung des Ventils – äquivalent zum Beispielmmodell aus Kapitel 3.1. Im Unterschied zum theoretischen Ventilmodell ist das reale Ventil durch eine Kennlinie charakterisiert. Außerdem sind die Geometrie und die Position des Ventils nicht als geometrische Größe bekannt. Stattdessen wurde in vorliegenden Messungen das Stellgrößensignal  $u$  zum Steuern des Ventilschiebers mit dem diskreten Wertebereich

$$u = \{-127, -126, \dots, 0, \dots, 126, 127\} \quad (4.17)$$

aufgezeichnet. Die Ventilposition wird durch das Signal  $u_{\text{pos}}$  mit dem diskreten Wertebereich

$$u_{\text{pos}} = \{-117, -116, \dots, 0, \dots, 116, 117\} \quad (4.18)$$

beschrieben. Aufgrund einer positiven Ventilüberdeckung ist das Übertragungsverhalten vom Stellsignal zur Ventilposition nicht linear. Mit einer Messung über den gesamten Wertebereich des Stellsignals  $u$  lässt sich der Zusammenhang, dargestellt in Abbildung 4.6, leicht ermitteln. Die gemessenen Wertepaare werden in einer sogenannten *Lookup-Tabelle (LUT)* mit der Bezeichnung „LUT1“ gespeichert und dem SIMULINK-Modell bei einer Simulation zur Verfügung gestellt. Für die Wertepaare, die zwischen den gemessenen Punkten liegen, wird linear interpoliert.

Der Zusammenhang zwischen dem Signal für die Ventilposition  $u_{\text{pos}}$  und den daraus resultierenden Volumenströme  $q_A$  und  $q_B$  ist ebenfalls nicht linear. Auch hierfür wird im Modell eine *Lookup-Tabelle* mit der Bezeichnung „LUT2“ zur linearen Interpolation verwendet, deren Werte im späteren Verlauf dieser Arbeit identifiziert werden.

### 4.1.3 Gesamtmodell

In Abbildung 4.7 ist das Gesamtmodell des Hydraulikkreises dargestellt. Das Ventilsteuersignal  $u$  ist hierbei die Stellgröße. Sie bestimmt über identifizierte Kennlinien

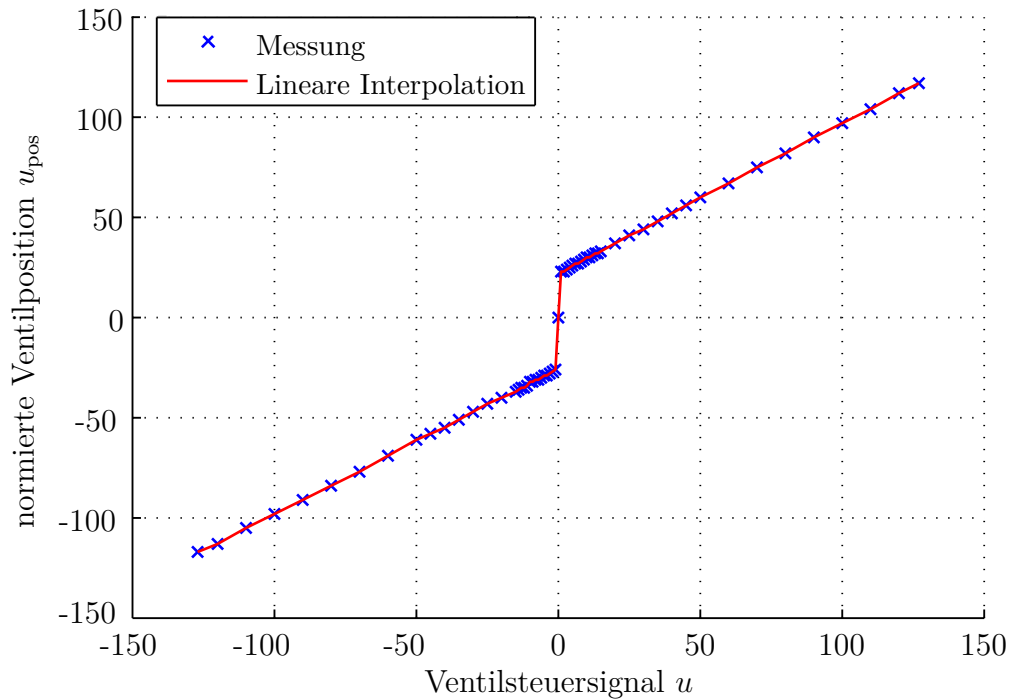


Abbildung 4.6: Darstellung des Übertragungsverhaltens vom Stellsignal zur Ventilposition (LUT1).

die Volumenströme  $q_A$  und  $q_B$ , die für den Druckaufbau in den Zylinderkammern und somit für eine Bewegung des mit der Leiter gekoppelten Kolbens sorgen. Die interessierende Systemgröße am Ausgang ist die Zylinderposition  $x$  bzw. der aus der Kinematik resultierende Leiterwinkel  $\phi_L$ . Durch das Implementieren der vorgestellten Gleichungen ergibt sich das SIMULINK-Gesamtmodell des Leiterhydraulikkreises, welches als Signalfluss-Diagramm in Abbildung 4.8 illustriert ist. Die Kraft  $f_{\text{link}}$  in der Kolbenstange des Zylinders realisiert die Koppelung des hydraulischen Modell-Blocks mit dem mechanischen Gesamtmodell.

## 4.2 Systemidentifikation

Das nichtlineare Verhalten des 4/3-Wegeventils und die unbekannt Systemparameter werden im Folgenden genauer untersucht. Da die Abmessungen und Kennlinien des Ventils unbekannt sind, soll die Ventilkennlinie nur mit Hilfe der Messergebnisse identifiziert werden. Außerdem werden die unsicheren Systemparameter des Modells in definierten Bereichen so lange variiert, bis das Simulationsergebnis näherungsweise mit den Messergebnissen übereinstimmt.

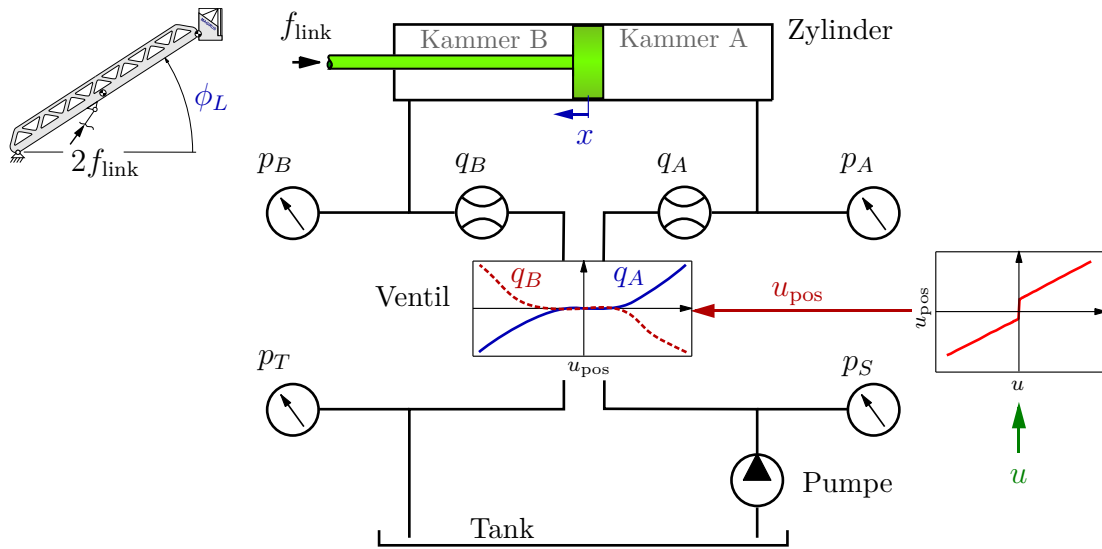


Abbildung 4.7: Hydraulikkreis des Antriebes der Feuerwehrdrehleiter.

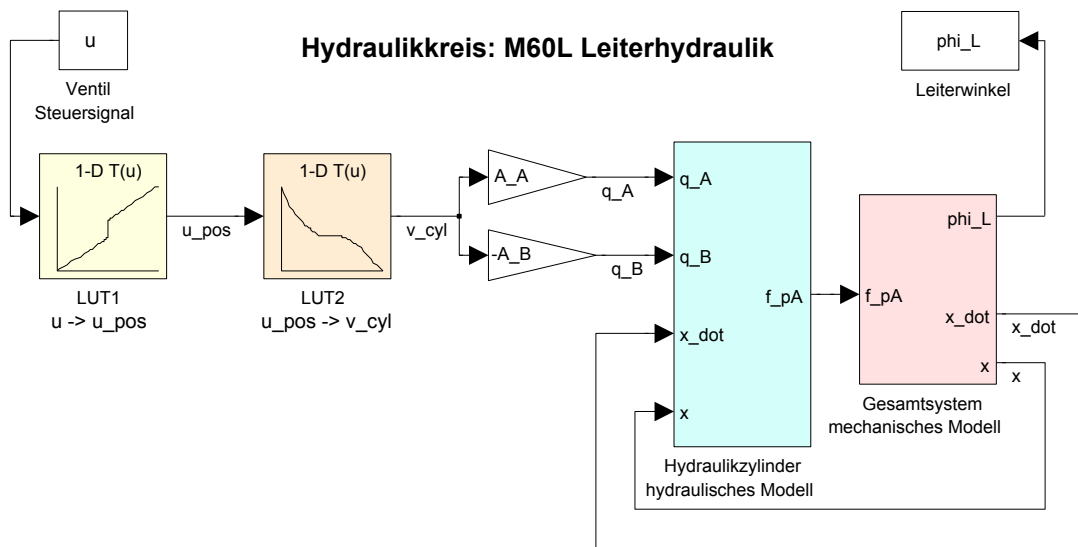


Abbildung 4.8: Gesamtmodell des Feuerwehrleiter-Hydraulikkreises.

### 4.2.1 Bestimmung der Ventilkennlinie

Das reale System wird in einer Messung für den gesamten Wertebereich der möglichen Ventilsteuersignale untersucht. Das Ventilsteuersignal  $u$  wird zunächst über einen Zeitraum konstant gehalten, so dass sich ein statisches Verhalten einstellt und die dynamischen Effekte des Systems abgeklungen sind. Der Zylinderkolben bewegt sich somit nach einer bestimmten Zeit mit einer konstanten Kolbengeschwindigkeit, die der aktuellen Ventilposition zugeordnet werden kann. Da die Geschwindigkeit des Zylinderkolbens nicht direkt gemessen werden kann, muss zunächst die Zylinderlänge  $z_{\text{cyl}}$  aus dem gemessenen Leiterwinkel  $\phi_L$  mit (4.3a) ermittelt werden. Anschließend wird das berechnete Zylinderlängensignal gefiltert und durch Geradenzüge approximiert. Die Steigung der Geraden entspricht somit der quasistatischen Geschwindigkeit  $v_{\text{cyl}}$ . Nach diesem Schema wird die Geschwindigkeit für verschiedene Ventilöffnungen bestimmt. Ein beispielhafter Messdatenausschnitt ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Die Ermittlung der zugehörigen quasistatischen Geschwindigkeit ist exemplarisch in Abbildung 4.10 illustriert. Als Resultat ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Ventilkolbenposition  $u_{\text{pos}}$  und der sich einstellenden Kolbengeschwindigkeit  $v_{\text{cyl}}$  am Hydraulikzylinder, aufgezeigt in Abbildung 4.11.

Im quasistatischen Fall lassen sich die vom Zylinderkolben verdrängten Volumenströme  $q_A$  und  $q_B$  in Abhängigkeit der quasistatischen Kolbengeschwindigkeit  $v_{\text{cyl}}$  beschreiben,

$$q_A = A_A v_{\text{cyl}} \quad \text{und} \quad q_B = -A_B v_{\text{cyl}} . \quad (4.19)$$

Aufgrund der quasistatischen Betrachtung fließen diese vom Kolben verdrängten Volumenströme zum gleichen Zeitpunkt auch durch die Ventile, die in Abbildung 4.12 als hydraulische Drosseln dargestellt sind. Somit lassen sich die Volumenströme anhand des Ventilsteuersignals  $u$  und den *Lookup-Tabellen* „LUT1“ und „LUT2“ (Ventilkennlinie) bestimmen. Die Dynamik des Ventilkolbens wird hier vernachlässigt, da von einem sehr schnellen Ventil mit Positionsregelung ausgegangen wird.

### 4.2.2 Parameteridentifikation

Die meisten Modellparameter der Leiterhydraulik sind aus Datenblättern bekannt oder können durch physikalische Zusammenhänge aus anderen Parametern berechnet werden. Die bekannten Parameter sind im Anhang in Tabelle C.4 aufgelistet.

Es existieren außerdem unbekannte Parameter, die durch einen Messdatenabgleich identifiziert werden müssen. Mit Erfahrungswerten aus der Literatur werden für diese unbekannt Parameter Wertebereiche abgeschätzt. Durch eine Simulationsschleife entsprechend Abbildung 4.13 können einzelne Parameter in einem vorgegebenen Wertebereich variiert und simuliert werden. Die Ergebnisse werden zusammen mit den Messdaten in einem Diagramm gespeichert und können anschließend visuell bewertet werden. Zunächst wird untersucht wie stark der Einfluss durch die Variation eines Parameters ist. Anschließend wird die Simulation mit gewählten Parameterwerten durchgeführt, die aus dem Wertebereich entnommen sind. Falls ein bestimmter Parameter eine

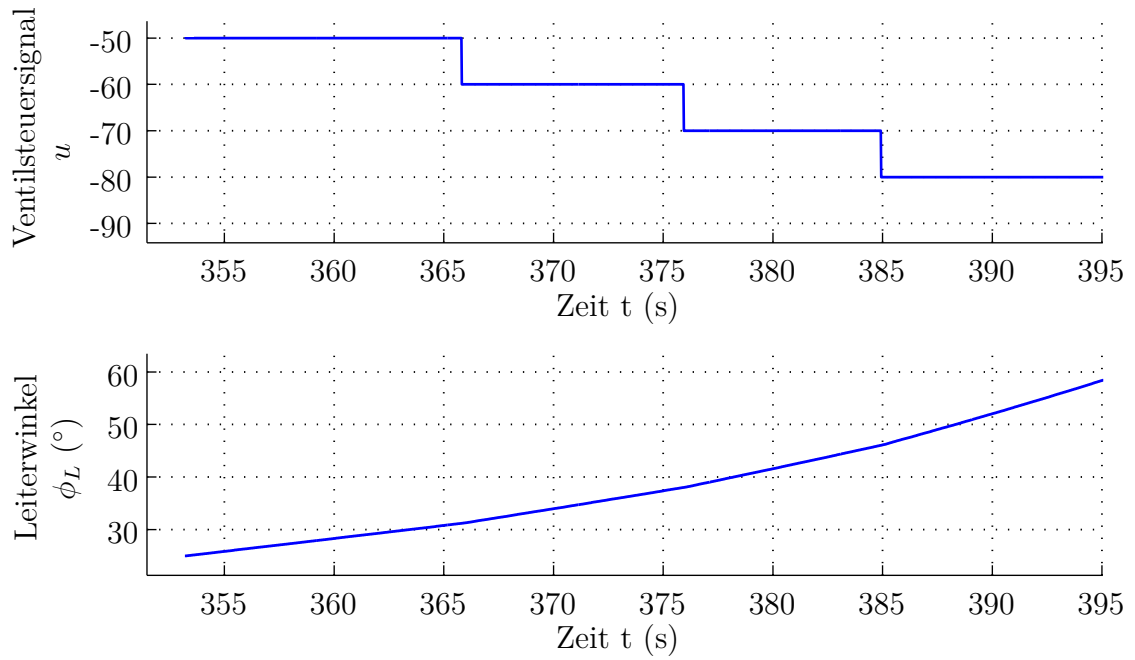


Abbildung 4.9: Ausschnitt der Messauswertung am realen Modell.

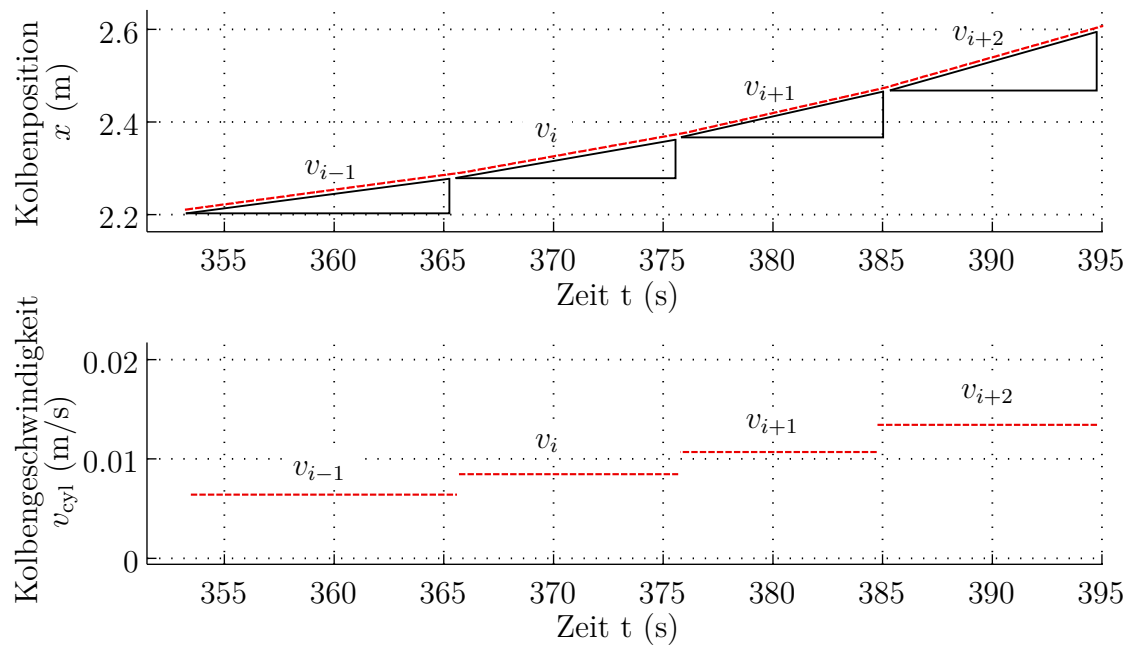


Abbildung 4.10: Darstellung der berechneten Kolbenposition und Kolbengeschwindigkeit anhand eines Messdatenausschnitts.

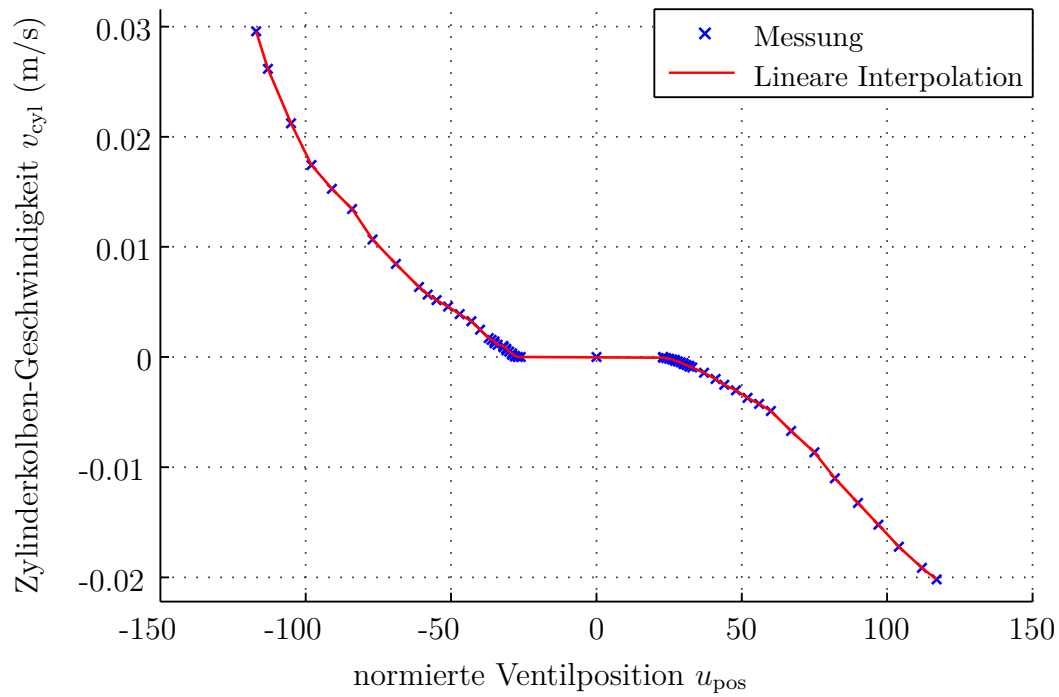


Abbildung 4.11: Darstellung des Übertragungsverhaltens der Ventilposition zur quasi-statischen Zylinderkolben-Geschwindigkeit (LUT2).

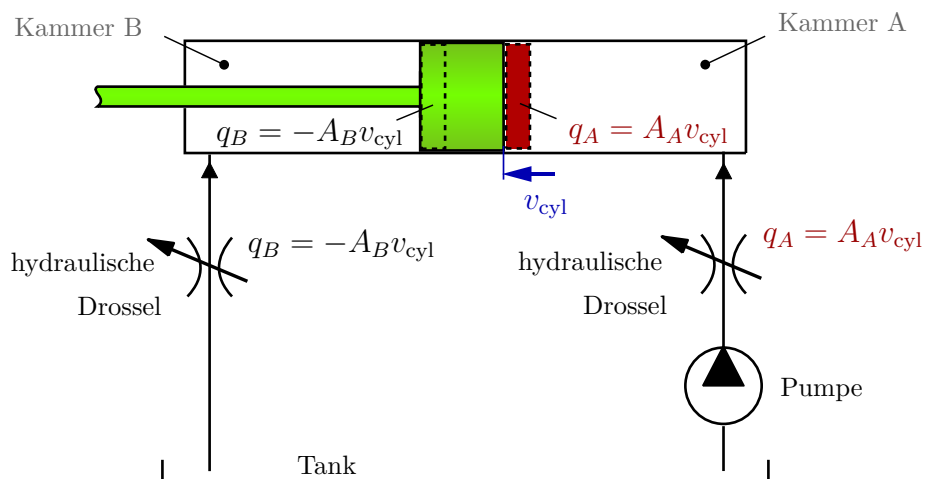


Abbildung 4.12: Hydraulisches Modell zur Ventilidentifikation.

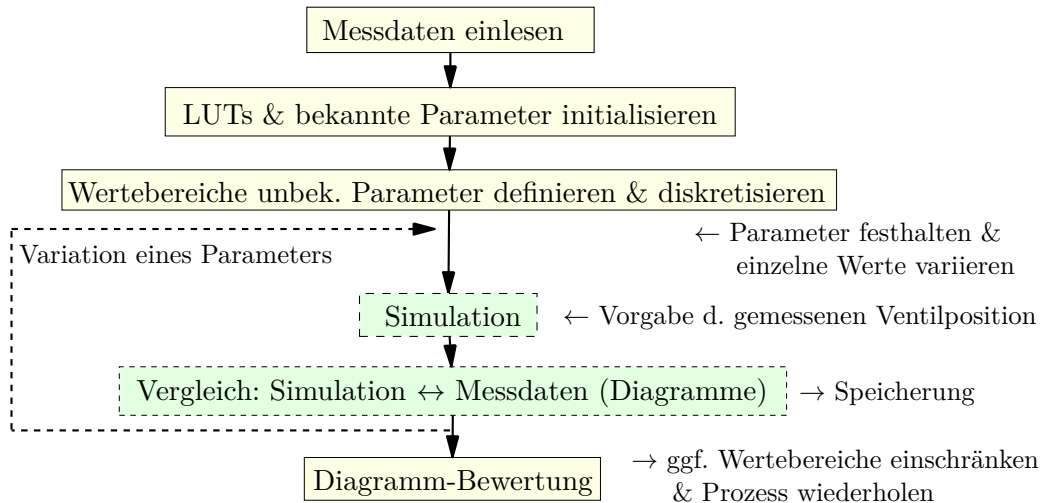


Abbildung 4.13: Darstellung der Simulationsschleife für die Parameter-Identifikation.

gute Übereinstimmung zeigt, wird der Wertebereich eingeschränkt und der Vorgang wiederholt. Somit können die unbekannt Parameter strukturiert identifiziert werden. Zur Validierung der identifizierten Parameter werden Messdatenaufzeichnungen von unterschiedlichen Fahrmanövern herangezogen.

In Tabelle C.5 im Anhang sind die identifizierten Parameter mit zugehörigem Wertebereich aufgelistet. Bei der Wahl des Wertebereichs des Kompressionsmoduls  $\beta$  wird von einem typischen Mineralöl mit einem geringen Luftanteil ausgegangen. Mit Hilfe der statischen Zylinderlast wird die stabilisierende Kraft  $f_{\text{stab}}$  für die Bestimmung der Anfangsdrücke  $p_{A0}$  und  $p_{B0}$  abgeschätzt. Das Ölvolumen in einer Hydraulikleitung zwischen Ventil und Arbeitszylinder sowie das Totvolumen im Hydraulikzylinder wird durch  $V_{\text{pipe}}$  charakterisiert. Diese Flüssigkeitsmenge hat ebenso wie das Kompressionsmodul  $\beta$  einen großen Einfluss auf die Steifigkeit des Hydrauliksystems und somit einen wichtigen Einfluss auf das dynamische Verhalten.

Das Gewicht des Zylinderkolbens  $m_p$  wird mittels der geometrischen Größen abgeschätzt. Anhand verschiedener Herstellerangaben wird der Wertebereich der Zylinderdämpfung  $d_p$  festgelegt. Die Massen der Leiterteile werden den Datenblättern entnommen und zur Gesamtmasse  $m_L$  aufsummiert. Allerdings können einige Aufbauten im Bereich des sogenannten „Aufrichtrahmens“ nur abgeschätzt werden. Dies hat auch Einfluss auf das berechnete Trägheitsmoment  $J_L^{(A)}$ .

### 4.3 Linearisierung des hydraulischen Leiterantriebs

Analog zu Kapitel 3.2 wird in diesem Abschnitt das hergeleitete Modell des Drehleiterantriebs linearisiert. Es werden zunächst die Winkelbeziehungen und die Kraft im



Zylinderkolben  $f_{\text{link}}$  linearisiert. Anschließend wird die Schnittkraft in der linearisierten Hydraulik berücksichtigt und die Übertragungsfunktion hergeleitet.

Eine nichtlineare Funktion  $f(x)$  kann an der Stelle  $x_0$  linearisiert werden. Für die lineare Funktion  $\tilde{f}(x)$  ergibt sich mit Hilfe der Taylorreihe

$$\tilde{f}(x) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) . \quad (4.20)$$

Der Leiterwinkel  $\phi_L$  ergibt sich aus den Gleichungen (4.1), (4.3b) und (4.11) in Abhängigkeit der Kolbenposition  $x$  zu

$$\phi_L(x) = \arccos \left( \underbrace{\frac{d_1^2 + d_2^2 - (z_{\text{cyl min}} + x)^2}{2 d_1 d_2}}_{y_1(x)} \right) + \beta' + \alpha' , \quad (4.21)$$

wobei  $y_1(x)$  den aufgezeigten Term zusammenfasst. Für eine Linearisierung um den Arbeitspunkt  $x_0$  ergibt sich

$$\tilde{\phi}_L(x) = \underbrace{\frac{y_1'(x_0)}{\sqrt{1 - y_1(x_0)^2}}}_{a_1} x + \underbrace{\phi_L(x_0) - \frac{y_1'(x_0)}{\sqrt{1 - y_1(x_0)^2}} x_0}_{a_2} , \quad (4.22)$$

mit  $y_1'(x_0) = \frac{z_{\text{cyl, min}} + x_0}{d_1 d_2}$ . Die gekennzeichneten Terme werden zu den Konstanten  $a_1$  und  $a_2$  zusammengefasst. Die linearisierte Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\tilde{\phi}}_L(x)$  und Winkelbeschleunigung  $\ddot{\tilde{\phi}}_L(x)$  kann durch Ableiten nach der Zeit berechnet werden,

$$\dot{\tilde{\phi}}_L(x) = a_1 \dot{x} \quad \text{und} \quad \ddot{\tilde{\phi}}_L(x) = a_1 \ddot{x} . \quad (4.23)$$

Der Winkel  $\psi$  entsprechend (4.2) wird zunächst um den Winkel  $\phi_{\text{kin}}$  und an der Stelle  $\phi_{\text{kin0}}$  linearisiert, daraus folgt

$$\tilde{\psi}(\phi_{\text{kin}}) = \psi(\phi_{\text{kin0}}) + \frac{y_2'(\phi_{\text{kin0}})}{1 + y_2(\phi_{\text{kin0}})^2} (\phi_{\text{kin}} - \phi_{\text{kin0}}) , \quad (4.24)$$

mit

$$y_2(\phi_{\text{kin0}}) = \frac{d_1 \sin \phi_{\text{kin0}} - d_2 \sin \beta'}{d_1 \cos \phi_{\text{kin0}} - d_2 \cos \beta'} \quad (4.25)$$

$$y_2'(\phi_{\text{kin0}}) = \frac{d_1^2 - d_1 d_2 \cos(\phi_{\text{kin0}} - \beta')}{(d_1 \cos \phi_{\text{kin0}} - d_2 \cos \beta')^2 (1 + y_2(\phi_{\text{kin0}})^2)} . \quad (4.26)$$

Aus der Beziehung  $\phi_{\text{kin}} = \phi_L - \alpha'$  und  $\phi_{\text{kin0}} = \phi_{L0} - \alpha'$  folgt

$$\phi_{\text{kin}} - \phi_{\text{kin0}} = \phi_L - \phi_{L0} , \quad (4.27)$$

somit lässt sich der linearisierte Winkel  $\tilde{\psi}$  in Abhängigkeit des Leiterwinkels  $\phi_L$  bestimmen,

$$\tilde{\psi}(\phi_L) = \underbrace{\frac{y_2'(\phi_{L0} - \alpha')}{1 + y_2(\phi_{L0} - \alpha')^2}}_{a_3} \phi_L + \underbrace{\psi(\phi_{L0} - \alpha') - \frac{y_2'(\phi_{L0} - \alpha')}{1 + y_2(\phi_{L0} - \alpha')^2} \phi_{L0}}_{a_4} \quad (4.28)$$

Die gekennzeichneten Terme werden zu den Konstanten  $a_3$  und  $a_4$  zusammengefasst. Mit (4.22) ergibt sich  $\tilde{\psi}$  in Abhängigkeit von  $x$ ,

$$\tilde{\psi}(x) \approx \tilde{\psi}(\tilde{\phi}_L) = a_3(a_1x + a_2) + a_4 . \quad (4.29)$$

Die Kraft im Zylinderkolben lässt sich aus (4.10) und den linearisierten Winkeln näherungsweise bestimmen,

$$f_{\text{link}}(x) \approx \frac{(J_{L \text{ mod}}^{(A)} + m_B l^2) \ddot{\phi}_L(x) + (m_L l_{\text{cgL}} + m_B l) g \cos \tilde{\phi}_L(x)}{2d_1 \sin(\tilde{\psi}(x) - \tilde{\phi}_L(x) + \alpha)} . \quad (4.30)$$

Durch das Linearisieren an  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = 0$  und  $\ddot{x} = 0$  ergibt sich

$$\tilde{f}_{\text{link}}(x_0, x, \dot{x}, \ddot{x}) = b_1(x_0) \ddot{x} + b_2 x + f_{\text{const}} , \quad (4.31)$$

mit den Koeffizienten

$$b_1(x_0) = \frac{(J_{L \text{ mod}}^{(A)} + m_B l^2) a_1}{\vartheta_2(x_0)} \quad (4.31a)$$

$$b_2(x_0) = \frac{\vartheta_1'(x_0) \vartheta_2(x_0) - \vartheta_2'(x_0) \vartheta_1(x_0)}{\vartheta_2(x_0)^2} \quad (4.31b)$$

$$f_{\text{const}}(x_0) = \frac{(m_L l_{\text{cgL}} + m_B l) g \cos(a_1 x_0 + a_2)}{\vartheta_2(x_0)} - b_2(x_0) x_0 . \quad (4.31c)$$

Zur besseren Darstellung wurden die Terme

$$\vartheta_1(x_0) = (m_L l_{\text{cgL}} + m_B l) g \cos(a_1 x_0 + a_2) \quad \text{und} \quad (4.32)$$

$$\vartheta_2(x_0) = 2d_1 \sin(a_1(a_3 - 1)x_0 + (a_3 - 1)a_2 + a_4 + \alpha) \quad (4.33)$$

verwendet, wobei  $\vartheta_1'(x)$  und  $\vartheta_2'(x)$  die jeweiligen Ableitungen nach  $x$  bezeichnen. In Abbildung 4.14 ist die Linearisierung an einem Arbeitspunkt  $x_0$  für den statischen Fall ( $\ddot{x} = 0$ ) dargestellt. Die statische Kraft ist dabei über der Kolbenposition aufgetragen.

Das Hydraulikmodell des Leiterantriebs ist äquivalent zum hydraulischen System des Ein-Massen-Schwingers aus Kapitel 3.2. Somit kann die bereits linearisierte Übertragungsfunktion entsprechend (3.14) verwendet werden. Mit der wegbezogenen Flussverstärkung  $K_{q\text{Int}}$ , dem Ventilsteuersignal  $u$  und Transformation der linearisierten Zylinderkraft  $\tilde{f}_{\text{link}}$  ergibt sich

$$K_{q\text{Int}} U(s) - A_k X(s) = \frac{1}{A_k} \left[ (m_p + b_1) X(s) s^2 + d_p X(s) s + b_2 X(s) + f_{\text{const}} \right] \left( \frac{V_t}{4\beta} s + K_c \right) . \quad (4.34)$$

Der konstante Anteil der linearisierten Zylinderkraft wird hierbei durch den Term  $f_{\text{const}}$  beschrieben. Somit folgt für die Zylinderkolbenposition

$$X(s) = \frac{\frac{K_{q\text{Int}}}{A_k} U(s) - \frac{1}{A_k^2} \left( \frac{V_t}{4\beta} s + K_c \right) f_{\text{const}}}{\frac{V_t(m_p + b_1)}{4\beta A_k^2} s^3 + \left( \frac{K_c(m_p + b_1)}{A_k^2} + \frac{d_p V_t}{4\beta A_k^2} \right) s^2 + \left( 1 + \frac{d_p K_c}{A_k^2} + \frac{b_2 V_t}{4\beta A_k^2} \right) s + \frac{b_2 K_c}{A_k^2}} . \quad (4.35)$$

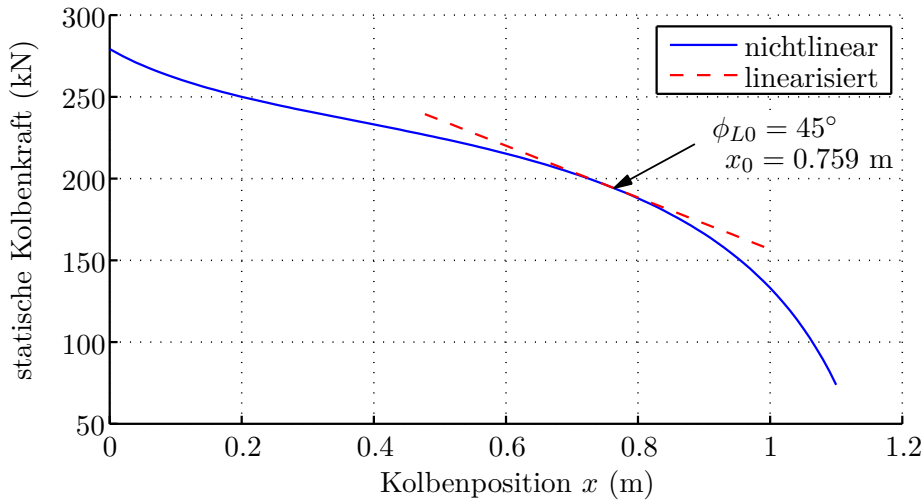


Abbildung 4.14: Statischer Anteil der nichtlinearen und der linearisierten Kolbenkraft.

Analog zu (3.15) können die Terme  $d_p K_c / A_k^2$  und  $b_2 V_t / 4\beta A_k^2$  vernachlässigt werden, da sie wesentlich kleiner als Eins sind. Auch der Term  $b_2 K_c / A_k^2$  ist verhältnismäßig klein, da der Druckdurchflusskoeffizient gewöhnlich im Bereich von  $K_c \approx \{1 \cdot 10^{-10} \dots 1 \cdot 10^{-13}\}$  liegt. Daraus können die Übertragungsfunktionen  $G_u(s)$  und  $G_f(s)$  hergeleitet werden,

$$X(s) = \underbrace{\frac{K_{qInt} 4\beta A_k}{V_t m_p}}_{G_u(s)} U(s) - \underbrace{\frac{\left(\frac{V_t}{4\beta} s + K_c\right) \frac{4\beta}{V_t m_p}}{(s^2 + 2D_{FL}\omega_{0FL}s + \omega_{0FL}^2)s}}_{G_f(s)} f_{const} + x_i, \quad (4.36)$$

mit der ungedämpften Eigenfrequenz  $\omega_{0FL}$  und dem Lehr'schen Dämpfungsmaß  $D_{FL}$  des hydraulischen Antriebs der Feuerwehrleiter,

$$\omega_{0FL} = \sqrt{\frac{4\beta A_k^2}{V_t(m_p + b_1)}} \quad \text{und} \quad D_{FL} = \frac{K_c}{A_k} \sqrt{\frac{\beta(m_p + b_1)}{V_t}} + \frac{d_p}{4A_k} \sqrt{\frac{V_t}{\beta(m_p + b_1)}}. \quad (4.37)$$

Die zusätzliche Konstante  $x_i$  stellt die Startposition des Zylinderkolbens dar. Zur Berechnung der Eigenfrequenz  $\omega_{FL}$  des gedämpften Systems wird (3.18) herangezogen. Das gesamte Modell ist in Abbildung 4.15 dargestellt, wobei  $G_u(s)$  den Einfluss des Ventilsteuersignals und  $G_f(s)$  den Einfluss des Lastanteils charakterisiert. Für den relativen Grad ergibt sich  $r(G_u) = 3$ .

## Wegbezogene Flussverstärkung und Druckdurchflusskoeffizient

Die wegbezogene Flussverstärkung  $K_{qInt}$  charakterisiert das Übertragungsverhalten des Ventilsteuersignals  $u$  zum Arbeitsvolumenstrom  $q_L$ . Sie ist normalerweise eine Konstan-

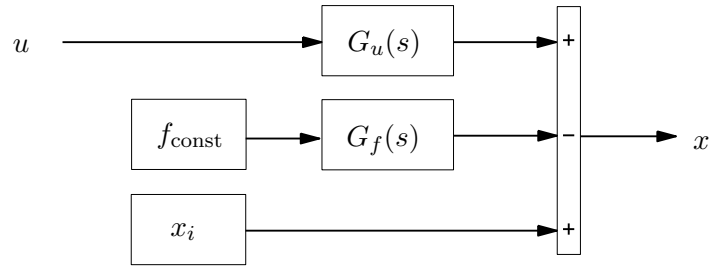


Abbildung 4.15: LTI-Modell der Leiterhydraulik.

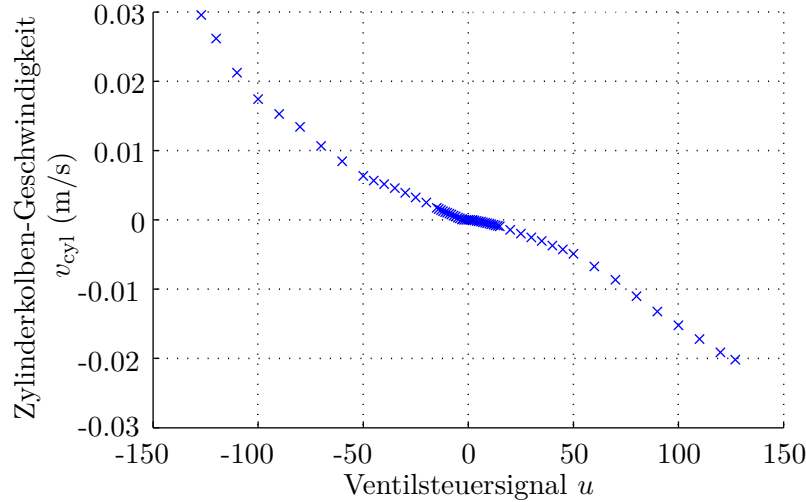


Abbildung 4.16: Zusammenhang der quasistatischen Kolbengeschwindigkeit  $v_{\text{cyl}}$  und des Ventilsteuersignals  $u$ , genannt „LUT3“ (Kombination von LUT1 & LUT2).

te, die die Volumenstromänderung im Bereich der Ventilnullstellung beschreibt,

$$K_{q\text{Int}} \approx \left. \frac{dq_L}{du} \right|_{u=0}. \quad (4.38)$$

Das Durchflussverhalten des vorliegenden Hydraulikventils wird durch Kennlinien bestimmt, die abhängig von der Ventilstellung  $u$  sind und bereits ermittelt wurden. Mit Hilfe der quasistatischen Kolbengeschwindigkeit  $v_{\text{cyl}}$  und der mittleren Kolbenfläche  $A_k$  folgt für den mittleren Volumenstrom des linearen Modells

$$q_L = A_k v_{\text{cyl}}(u). \quad (4.39)$$

Durch die Kombination der *Lookup*-Tabellen „LUT1“ und „LUT2“ kann der diskrete Zusammenhang  $v_{\text{cyl}}(u)$  in Form einer Wertetabelle bezeichnet mit „LUT3“ gefunden werden. In Abbildung 4.16 sind die resultierenden Punkte dargestellt. Für die Herleitung des linearen Modells wurde für die Leiterhydraulik analog zu (3.8) folgender Zusammenhang verwendet

$$q_L = K_{q\text{Int}} u - K_c p_L. \quad (4.40)$$

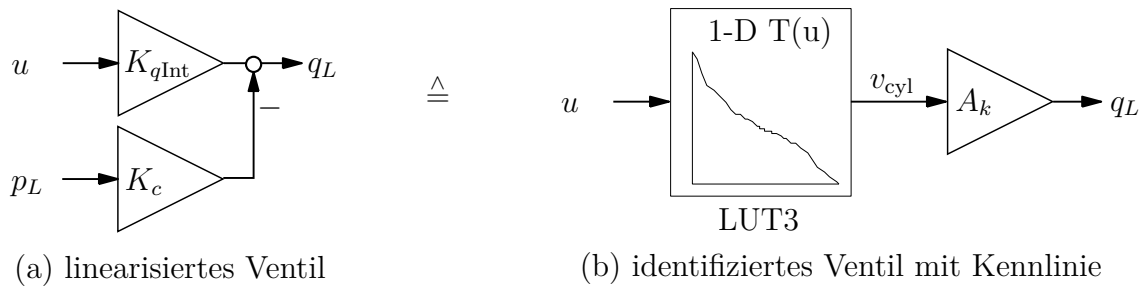


Abbildung 4.17: Realisierung des Ventilvolumenstroms im linearen Modell.

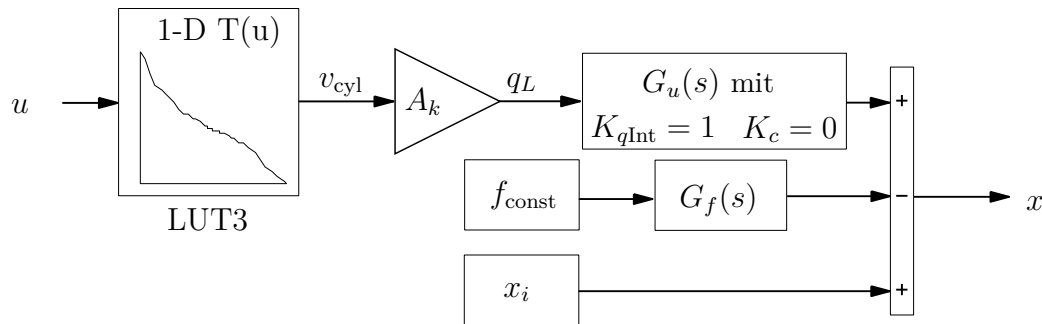


Abbildung 4.18: LTI-Modell der Leiterhydraulik mit Ventilkennlinie.

Die unterschiedlichen Modellierungen sind in Abbildung 4.17 veranschaulicht. Um das reale Ventilverhalten im linearen Modell der hydraulischen Drehleiter abzubilden, wird in dem hergeleiteten Modell die Ventilkennlinie „LUT3“ ergänzt und der Druckdurchflusskoeffizient  $K_c = 0$  gesetzt. Außerdem wird in der Übertragungsfunktion  $G_u(s)$  die wegbezogene Flussverstärkung  $K_{qInt} = 1$  gesetzt, da der Volumenstrom  $q_L$  direkt als Eingang fungiert. Das geänderte Modell ist in Abbildung 4.18 dargestellt. Da das Modell um die Ventilkennlinie „LUT3“ ergänzt wurde, ist der Zusammenhang des Ventilsignals  $u$  zur Kolbenposition  $x$  nicht mehr linear. Trotzdem wird das System im weiteren Verlauf der Arbeit als „lineares Modell“ bezeichnet.

## 4.4 Simulation und Validierung

In diesem Kapitel werden die Simulationsergebnisse des identifizierten nichtlinearen Leitermodells mit der Bezeichnung  $\Sigma_{FL}$  und des linearisierten Systems mit der Bezeichnung  $\Sigma_{FL \text{ lin}}$  verglichen und anhand Messergebnissen validiert. Das lineare System wird zunächst an dem Arbeitspunkt  $\phi_{L0} = 45^\circ$  bzw.  $x_0 = 0.759$  m linearisiert und simuliert.

Die Modellparameter des nichtlinearen Modells  $\Sigma_{FL}$  sind in den Tabellen C.4 und C.5 aufgeführt. In Tabelle C.6 sind die zusätzlichen Parameter des linearen Modells  $\Sigma_{FL \text{ lin}}$  aufgelistet. Da aus den Simulationsergebnissen des linearen Modells mit dem Trägheitsmoment  $J_L^{(A)}$  eine zu hohe Eigenfrequenz  $\omega_{FL}$  resultiert, wird das Trägheitsmoment um

den Wert  $\Delta J_L^{(A)}$  vergrößert, so dass das dynamische Verhalten weitgehend übereinstimmt. Als Resultat ergibt sich das modifizierte Trägheitsmoment  $J_{L \text{ mod}}^{(A)}$  des linearen Systems.

#### 4.4.1 Globales Hydraulikverhalten

In Abbildung 4.20 ist das globale Hydraulikverhalten des linearen und nichtlinearen Modells über einem großen Arbeitsbereich im Vergleich zur Messung dargestellt. Das Ventilsteuersignal  $u$  ist aus einer Messung entnommen und wird als Systemeingang des nichtlinearen und linearen Modells verwendet. Bei unterschiedlichen Ventilöffnungen wird die Feuerwehreiter aufgerichtet und geneigt. Die berechnete Leiterposition des nichtlinearen Modells  $\Sigma_{\text{FL}}$  und des linearen Modells  $\Sigma_{\text{FL lin}}$  stimmen trotz der Kraft-Linearisierung um den Arbeitspunkt  $\phi_{L0} = 45^\circ$  sehr gut überein. Das liegt vor allem daran, dass beide Modelle die gleiche Ventilkennlinie und Parameter verwenden. Die Diskrepanz zur Messung erklärt sich durch Ungenauigkeiten der Ventilkennlinie und sämtlicher Vernachlässigungen beim Herleiten der Modelle (z.B. Ventildynamik, Einfluss der Hydraulikleitung etc).

Da die Dynamik der Hydraulik in dieser Arbeit im Vordergrund steht, wird im folgenden Abschnitt das Schwingungsverhalten der Modelle anhand eines kleinen Messdatenausschnitts untersucht, der in Abbildung 4.19 illustriert ist.

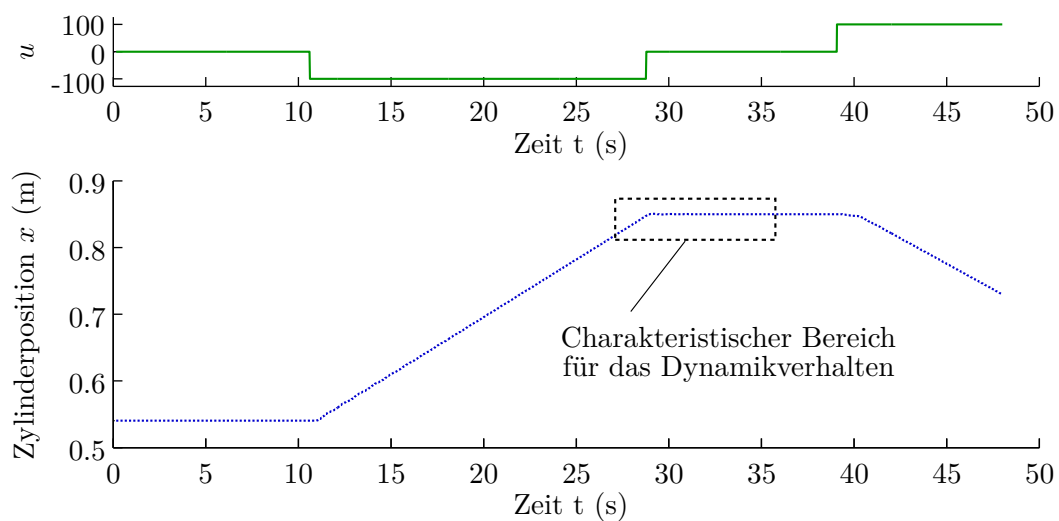


Abbildung 4.19: Messdatenausschnitt zu Validierung und Modellanalyse.

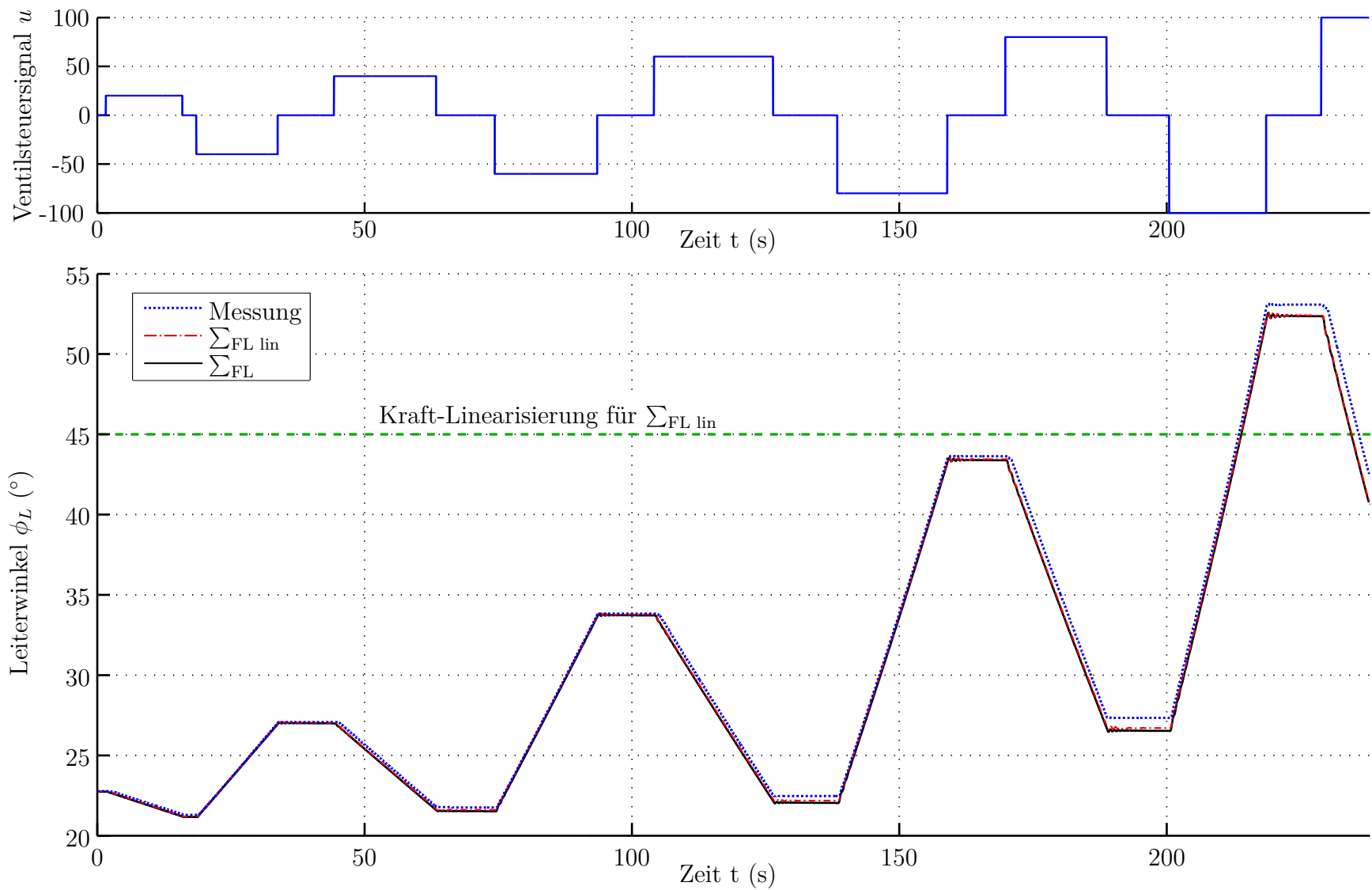


Abbildung 4.20: Untersuchung des globalen Hydraulikverhaltens der verschiedenen Modelle im Vergleich zur Messung.

### 4.4.2 Untersuchung der Hydraulikschwingungen

Das Ventilsteuersignal  $u$  wird entsprechend einem Messdatenausschnitt stufenförmig auf die Werte  $u = [0 \quad -100 \quad 0 \quad 100]$  gesetzt. Wie in Abbildung 4.19 dargestellt ist wird dadurch die Leiter aufgerichtet, abrupt gestoppt und geneigt. Da der Winkel  $\phi_L$  am unteren Ende der Leiter mit einer begrenzten Auflösung gemessen wird, werden die Hydraulikschwingungen nur unzureichend aufgezeichnet. Am oberen Ende des Leitersatzes ist nahe am Korb ein Gyroskop angebracht, welches die Winkelgeschwindigkeit misst. Anhand dieses Messsignals können sehr geringe Schwingungen registriert und analysiert werden. Mit Hilfe eines *Butterworth*-Tiefpassfilters vierter Ordnung wird das verrauschte Gyroskopsignal mit der Grenzfrequenz von 0.16 Hz gefiltert. In Abbildung 4.19 treten im Detail-Bereich Schwingungen auf, die das Dynamikverhalten des Gesamtsystems charakterisieren. Im Folgenden werden die beiden Modelle anhand dieses Ausschnittes validiert und untersucht.

In Abbildung 4.21 werden die Simulationsergebnisse des nichtlinearen und linearen Systems mit den Messwerten im charakteristischen Bereich verglichen. Der resultierende Verlauf des Leiterwinkels  $\phi_L$  stimmt sehr gut mit dem integrierten Gyroskopsignal der Messung überein. Die Abweichung der Messung von der Simulation hängt vermutlich zum einen mit dem Messrauschen des Gyroskops und zum anderen mit der Elastizität der realen Leiter zusammen, die im Starrkörpermodell unberücksichtigt bleibt. Anhand des unteren Diagramms ist erkennbar, dass auch die berechneten Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\phi}_L$  mit der Messung des Gyroskops sehr exakt übereinstimmen. Das heißt, dass die berechnete Eigenfrequenz  $\omega_{FL}$  und das Lehr'sche Dämpfungsmaß  $D_{FL}$  im Bereich des Arbeitspunktes  $\phi_{L0} = 45^\circ$  bzw.  $x_0 = 0.759$  m erfolgreich identifiziert sind. Das Ergebnis kann Tabelle C.6 im Anhang entnommen werden.

Zum Vergleich ist in Abbildung 4.22 die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}_L$  des am Arbeitspunkt  $\phi_{L0} = 32^\circ$  bzw.  $x_0 = 0.6$  m linearisierten Modells dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Frequenz des linearen Modells – wie erwartet – nicht mit der Messung übereinstimmt, da der Linearisierungspunkt sehr weit von der betrachteten Stelle entfernt liegt.

Falls der Term  $b_2 V_t / 4 \beta A_k^2$  für die Herleitung der Übertragungsfunktion in (4.3) nicht vernachlässigt wird, ändern sich die Eigenfrequenz und das Lehr'sche Dämpfungsmaß in dem vom Hersteller erlaubten Arbeitsbereich ( $\phi_L = [-15^\circ; 75^\circ]$ ) um weniger als  $\pm 2\%$ . Diese Vereinfachung ist somit gerechtfertigt und hat kaum einen Einfluss auf das Ergebnis. Die hydraulische Eigenfrequenz und das Lehr'sche Dämpfungsmaß sind in Abbildung 4.23 in Abhängigkeit des Leiterwinkels dargestellt. Der relative Fehler charakterisiert dabei betragsmäßig das Verhältnis aus der vereinfachten Rechnung und der Berechnung ohne Vernachlässigung.



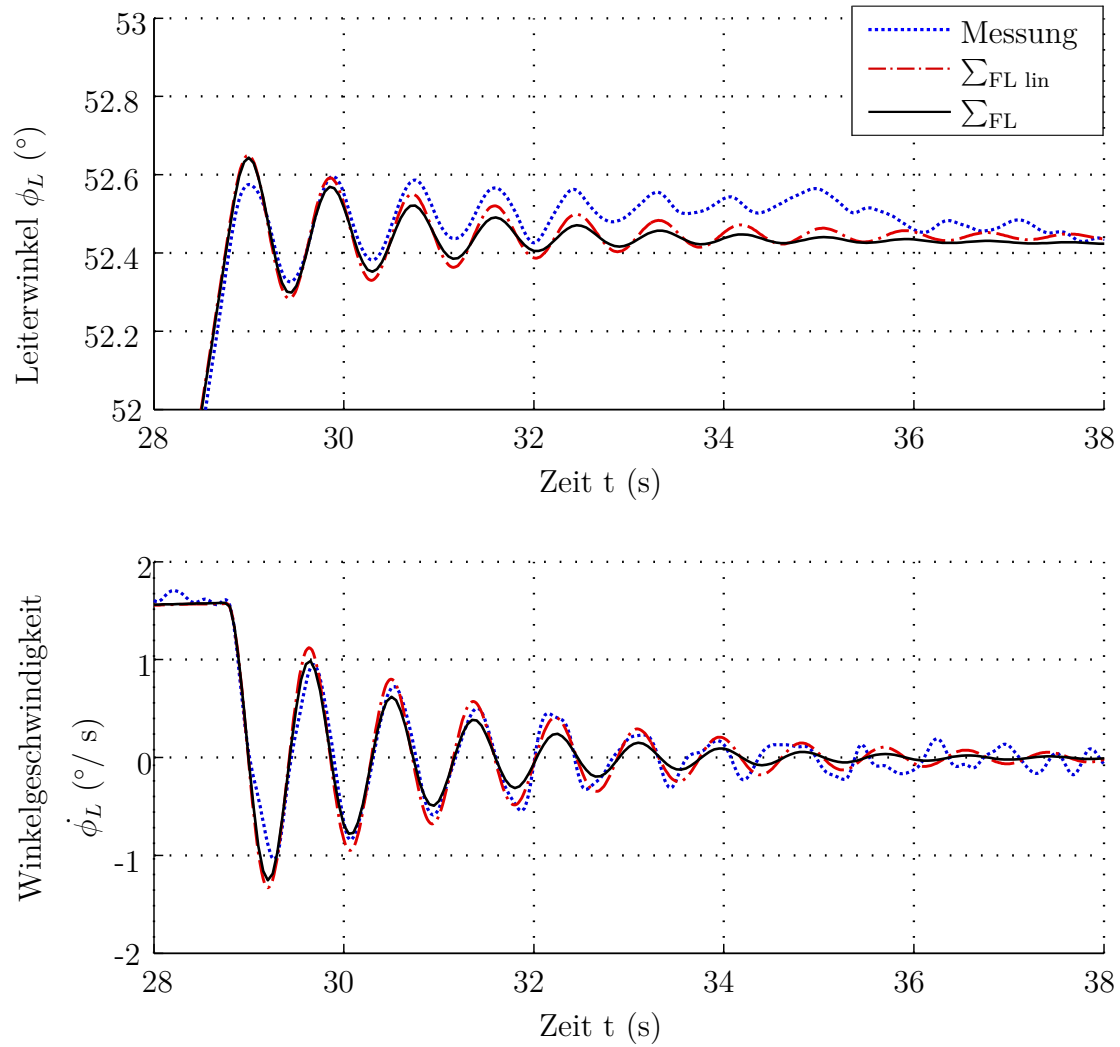


Abbildung 4.21: Vergleich des linearen Modells  $\Sigma_{FL \text{ lin}}$  an der Stelle  $\phi_{L0} = 45^\circ$  bzw.  $x_0 = 0.759$  m und des nichtlinearen Modells  $\Sigma_{FL}$  mit den gemessenen Daten im charakteristischen Bereich für die eingefahrene Feuerwehreiter ( $l = 12.1$  m).

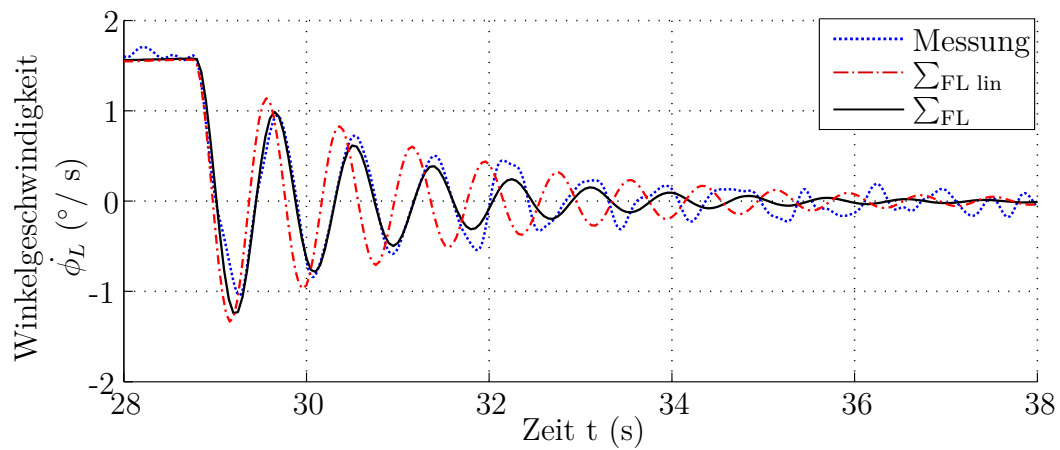


Abbildung 4.22: Dynamikvergleich mit  $\Sigma_{FL lin}$  an der Stelle  $\phi_{L0} = 32^\circ$ .

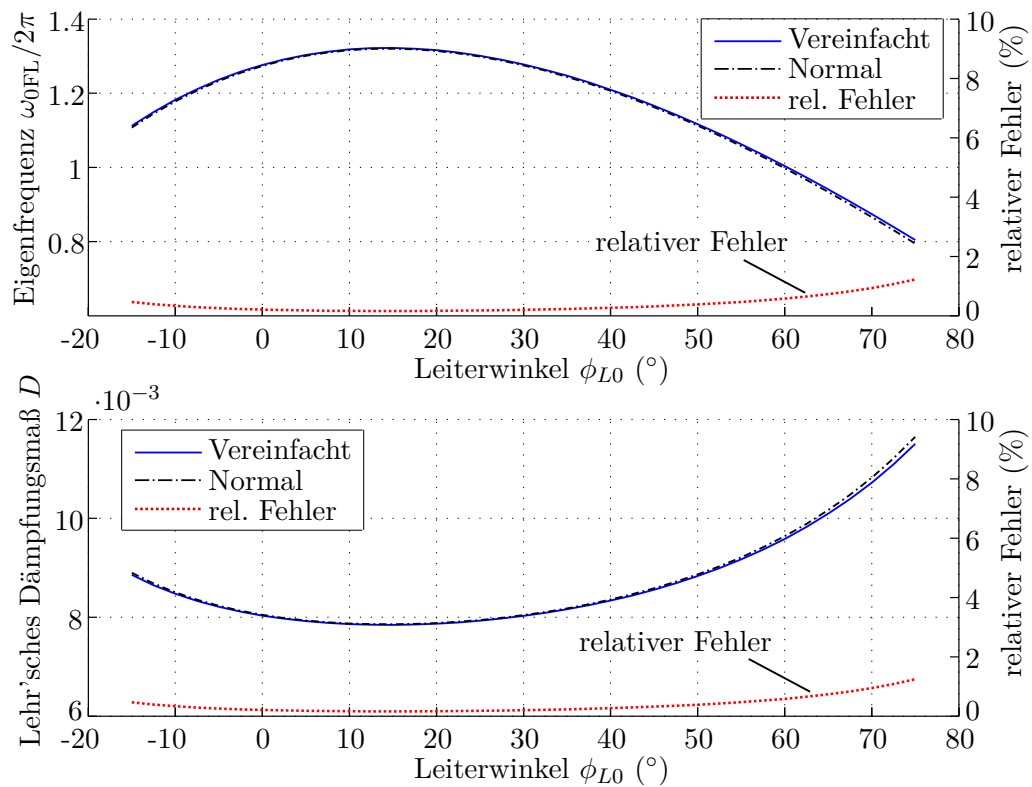


Abbildung 4.23: Eigenfrequenz  $\omega_{0FL}/2\pi$  und D\u00e4mpfungsma\u00df  $D$  in Abh\u00e4ngigkeit vom Arbeitspunkt  $\phi_{L0}$  um den die Zylinderkraft linearisiert wird.

# Kapitel 5

## Folgeregelung eines Hydraulikkreises

In vielen hydraulischen Anwendungen muss eine Hydraulikstrecke einer vorgegebenen Trajektorie bestmöglich folgen können. Für diesen Fall kann eine Zwei-Freiheitsgrade-Regelung beispielsweise anhand eines linearen Systems entworfen werden. Anschließend kann diese Regelstruktur an dem realen Modell implementiert und getestet werden.

In diesem Kapitel wird die Zwei-Freiheitsgrade-Regelung vorgestellt und für das Beispielmodell des Ein-Massen-Schwingers aus Kapitel 3.1 entworfen. Anschließend wird analog hierzu eine Trajektorien-Folgeregelung für den Hydraulikkreis der Feuerwehrleiter aus Kapitel 4 ausgelegt.

### 5.1 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung

Zur gezielten Beeinflussung des Führungsverhaltens bietet es sich an, die standardmäßige Regelkreisstruktur aus Regler und Strecke um eine modellgestützte Vorsteuerung zu erweitern [Hor63]. Die Struktur bestehend aus Vorsteuerung  $\Sigma_{FF}$  (*feed forward control*) und Regelung  $\Sigma_{FB}$  (*feedback control*) besitzt also zwei Freiheitsgrade, um das Führungs- und das Störverhalten unabhängig voneinander entwerfen und optimieren zu können [HZ04]. In Abbildung 5.1 ist die Zwei-Freiheitsgrade-Regelkreisstruktur dargestellt. Für eine asymptotisch stabile Strecke

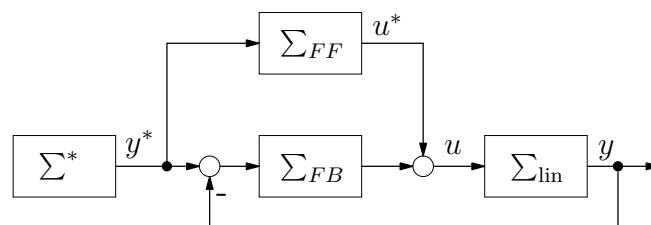


Abbildung 5.1: Zwei-Freiheitsgrade-Regelstruktur mit Strecke  $\Sigma_{lin}$ , Regler  $\Sigma_{FB}$ , Vorsteuerung  $\Sigma_{FF}$  und Sollwertgeber  $\Sigma^*$ .

$$\Sigma_{\text{lin}} : \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (5.1)$$

mit der Übertragungsfunktion  $G(s)$ , dem Eingang  $u(t)$  und dem Ausgang  $y(t)$  soll im Folgenden eine Vorsteuerung  $u^*(t)$  berechnet werden. Der Vorsteuerungsentwurf beinhaltet die Forderung, dass der Ausgang  $y(t)$  einem vorgegebenen Sollverlauf  $y^*(t)$  identisch folgt. Im Idealfall wird somit die Inversion des Systems  $\Sigma_{FF} = \Sigma_{\text{lin}}^{-1}$  angestrebt,

$$\Sigma_{FF} : \quad U^*(s) = G_{FF}(s) Y^*(s) \quad (5.2)$$

$$\Rightarrow G_{FF}(s) = G^{-1}(s) . \quad (5.3)$$

Allerdings ist eine inverse Übertragungsfunktion mit relativem Grad  $r > 0$  technisch nicht realisierbar, da der Zähler eine höhere Ordnung als der Nenner aufweist. Zur Lösung dieses Problems bietet es sich an, so viele schnelle Pole hinzuzufügen bis die Steuerung realisierbar ist. Dies kann als eine Annäherung der  $n$ -fachen Differenzierung durch ein  $PTn$ -Glied interpretiert werden, das eine sehr kleine Zeitkonstante  $T$  und die Verstärkung  $k = 1$  aufweist. Mit dem relativen Grad  $r$  der Übertragungsfunktion  $G(s)$  lässt sich eine realisierbare Vorsteuerung wie folgt durch einen Vorfilteranteil approximieren,

$$G_{FF}(s) \approx G^{-1}(s) \frac{1}{(Ts + 1)^r} . \quad (5.4)$$

Als Regler kann beispielsweise ein  $PID$ -Glied mit der Verstärkung  $k_P$ , der Integrationskonstante  $k_I$ , der Dämpfungskonstante  $k_D$  und dem Filterkoeffizient  $N$  verwendet werden,

$$\Sigma_{FB} : \quad K_{PID}(s) = k_P + k_I \frac{1}{s} + k_D \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}} . \quad (5.5)$$

Der Sollwertgeber  $\Sigma^*$  generiert eine Referenz-Trajektorie, der das System folgen soll. Im vorliegenden Fall soll das hydraulische System einen sanften Arbeitspunktwechsel mit möglichst geringen ruckartigen Bewegungen (Beschleunigungsänderungen) vollziehen. In der Robotik wird dies häufig durch die Verwendung von Splines oder ausreichend glatten Polynomen realisiert [Rüc06]. Die Solltrajektorien in dieser Arbeit werden durch die Berechnung eines 3-fach stetig differenzierbaren Polynoms entsprechend Kapitel B im Anhang geplant. Bei einem System mit Stellgrößenbeschränkung muss außerdem die Trajektorie so generiert werden, dass mit der Folgeregelung die Stellgröße nicht überschritten wird.

## 5.2 Trajektorien-Folgeregelung des Ein-Massen-Schwingers

Im Folgenden wird der Entwurf der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung anhand des linearen Ein-Massen-Schwingermodells  $\Sigma_{\text{lin}}$  aus Kapitel 3.2 durchgeführt. Anschließend wird die Regelstruktur mit den resultierenden Parametern an dem nichtlinearen Modell  $\Sigma$

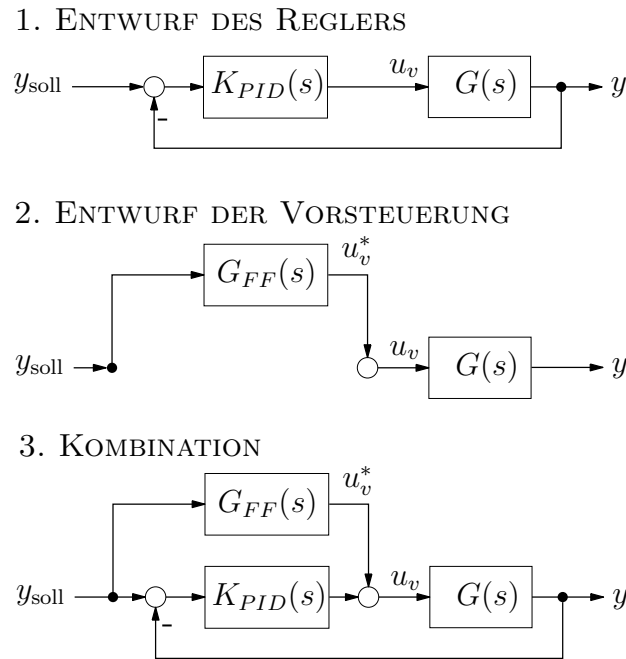


Abbildung 5.2: Gewählte Vorgehensweise beim Entwurf einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelkreisstruktur anhand eines linearen Modells.

aus Kapitel 3.1 getestet und analysiert. In Abbildung 5.2 ist die Vorgehensweise beim Entwurf der Zwei-Freiheitsgrade-Regelkreisstruktur illustriert.

Zunächst einmal wird der Regler – in diesem Fall ein  $PID$ -Glied – im geschlossenen Kreis ausgelegt. Durch das allmähliche Steigern der jeweiligen Reglerparameter  $k_P$ ,  $k_I$  und  $k_D$  kann das Führungsverhalten des geschlossenen Kreises sukzessive verbessert werden. Anschließend wird die Vorsteuerung entsprechend (5.4) mit der Strecke  $G(s)$  aus (3.21) ausgelegt, wobei für den relativen Grad  $r = 4$  gilt.

Die Simulationsergebnisse der einzelnen Entwurfsschritte anhand des linearen Modells sind in Abbildung 5.3 dargestellt. Die zugehörigen entworfenen Parameter sind in Tabelle 5.1 aufgelistet. In den Detail-Ansichten 5.3(a) und 5.3(b) sind die Unterschiede verdeutlicht. Es ist zu erkennen, dass der geschlossene Kreis mit dem reinen  $PD$ -Regler eine bleibende Regelabweichung aufweist. Der  $PID$ -Regler reagiert zu langsam auf eine Bewegungsänderung und schwingt sehr stark über. Die reine Vorsteuerung reagiert zwar schnell aber die Ausgangsgröße wird aufgrund der fehlenden Rückführung nicht an den Verlauf der Soll-Trajektorie angepasst. Eine Kombination der beiden Komponenten – also die Zwei-Freiheitsgrade-Regelung bestehend aus der Vorsteuerung und dem  $PID$ -Regler – zeigt jedoch sehr gutes Folgeverhalten.

Da der geschlossene Kreis des linearen Systems der vorgegebenen Trajektorie mit guter Näherung folgt, wird diese Zwei-Freiheitsgrade-Regelung auch an dem nichtlinearen System getestet. In Abbildung 5.4 ist der Vergleich des nichtlinearen Modells  $\Sigma$  und des linearen System  $\Sigma_{\text{lin}}$  mit den gleichen Parametern und identischer Regelkreisstruktur

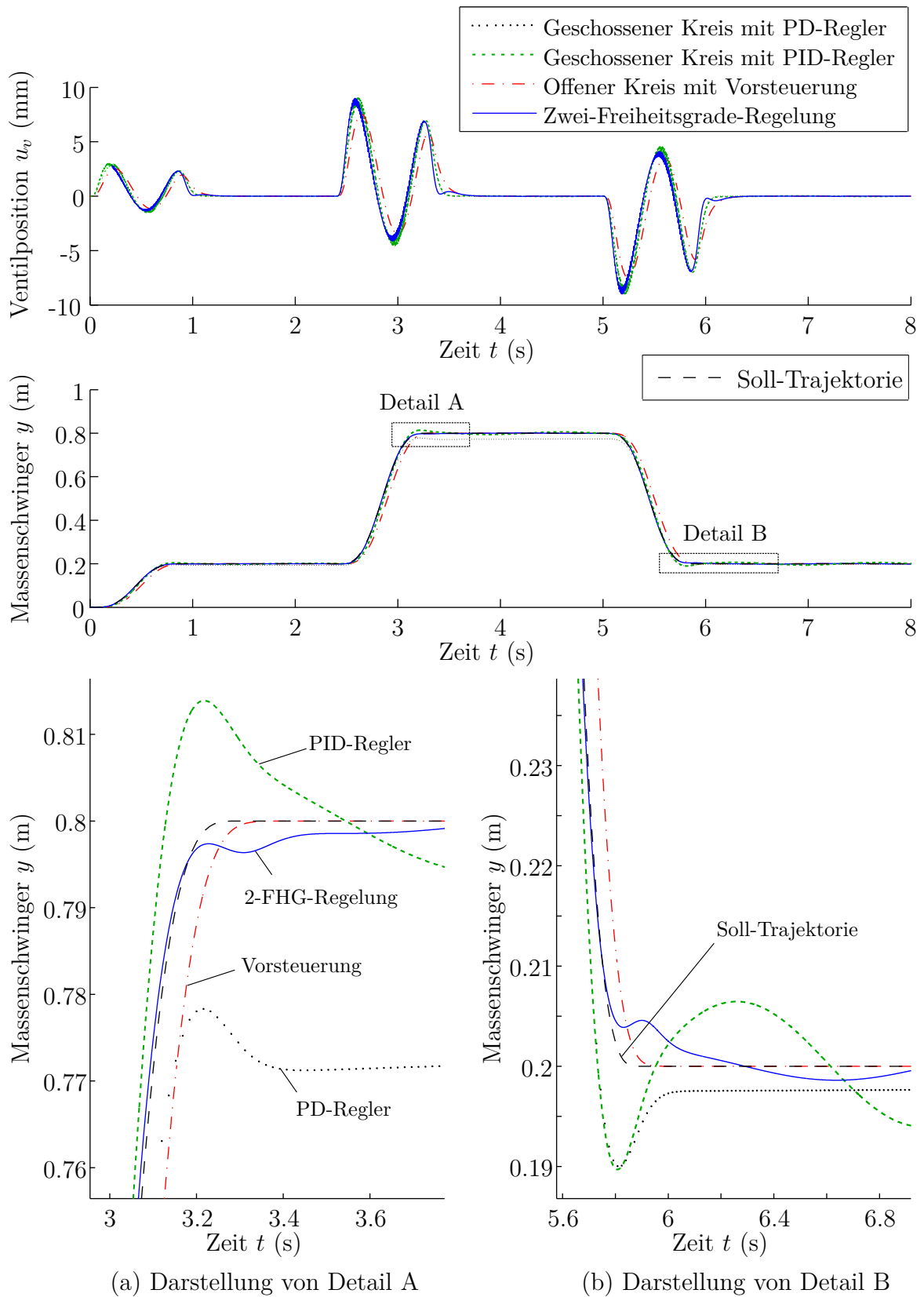


Abbildung 5.3: Entwurf der Parameter für die Zwei-Freiheitsgrade-Regelkreisstruktur mit dem linearen Modell  $\Sigma_{lin}$ .

Tabelle 5.1: Ergebnisse des Entwurfs der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung für den *Ein-Massen-Schwinger*.

Parameter	Wert	Bezeichnung
$k_P$	0.006	Verstärkungsfaktor des PID-Reglers
$k_I$	2	Integrationskonstante des PID-Reglers
$k_D$	0.1	Dämpfungskonstante des PID-Reglers
$N$	100	Filterkoeffizient des PID-Reglers
$T$	0.0125	Zeitkonstante der Vorsteuerung

tur dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Trajektorie mit sehr guter Näherung von beiden Systemen verfolgt wird. Die geringfügigen Abweichungen sind in den Detailansichten verdeutlicht und könnten durch weiteres Optimieren der Parameter oder andere Regelungskonzepte sukzessive vermindert werden.

## 5.3 Trajektorien-Folgeregelung für die Feuerwehrleiter

Zur Kompensation des Einflusses der Hydraulik des Drehleiterantriebs aus Kapitel 4, wird im folgenden Abschnitt eine Zwei-Freiheitsgrade-Regelung mit Hilfe des linearen Antriebsmodells  $\Sigma_{\text{FL lin}}$  entworfen. Diese Regelstruktur wird daraufhin am nichtlinearen System getestet.

### 5.3.1 Reglerentwurf am linearen Modell

Anhand einer vorgegebenen Trajektorie für die Zylinderposition  $x$  bzw. den damit verknüpften Leiterwinkel  $\phi_L$  wird analog zu Kapitel 5.2 zunächst ein Regler ausgelegt und anschließend die Vorsteuerung entwickelt und angepasst. In Abbildung 5.5 ist die ausreichend glatte Trajektorie illustriert, der das System folgen soll. Sie wurde als polynomiale Referenz-Trajektorie anhand Kapitel B bestimmt.

Die Inversion des linearen Leitermodell  $\Sigma_{\text{FL lin}}$  entsprechend (4.36) mit den Übertragungsfunktionen  $G_u(s)$  und  $G_f(s)$  ergibt sich zu

$$u = G_u^{-1}(x - x_i + G_f f_{\text{const}}) , \quad (5.6)$$

dabei wird die Anfangsposition durch  $x_i$  charakterisiert. Da  $G_u^{-1}$  nicht realisierbar ist, ergibt sich für die Vorsteuerung äquivalent zu (5.4) folgende Näherung,

$$G_{FF}(s) \approx G_u^{-1}(s) \frac{1}{(T s + 1)^r} , \quad (5.7)$$

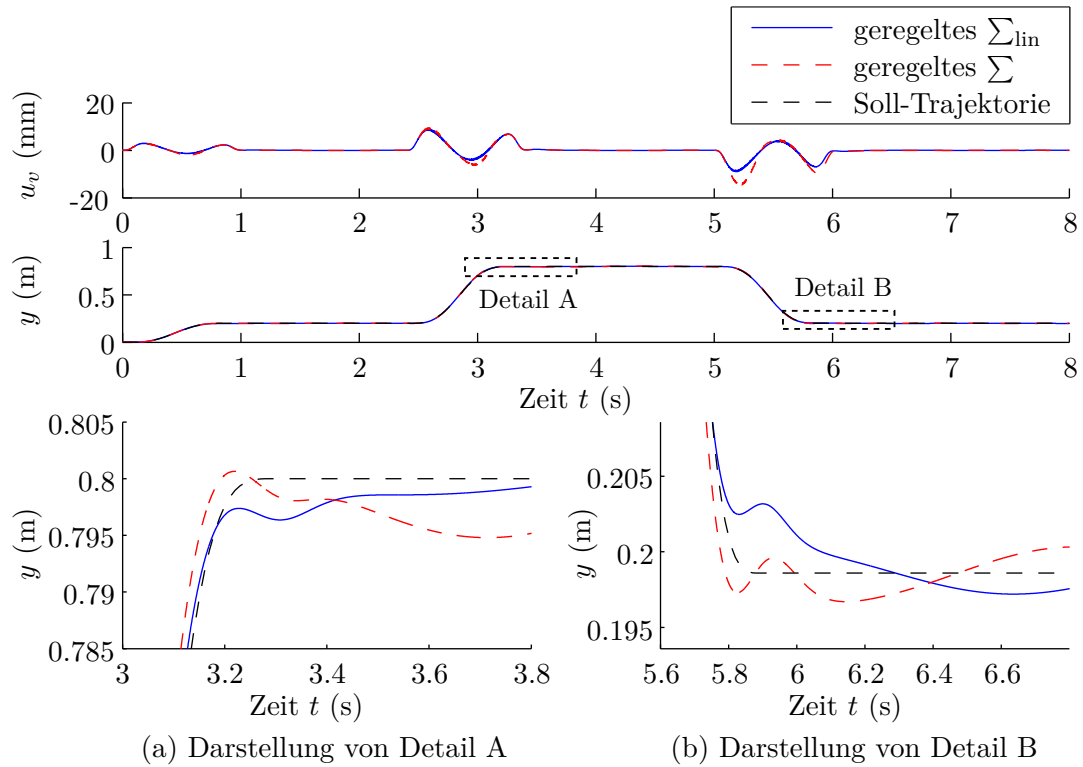


Abbildung 5.4: Vergleich der Simulationsergebnisse der geregelten linearen Modells  $\Sigma_{\text{lin}}$  und des geregelten nichtlinearen Modells  $\Sigma$ .

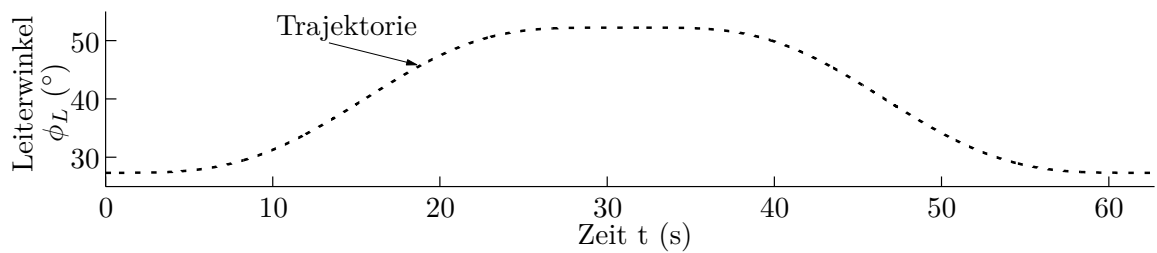


Abbildung 5.5: Darstellung der generierten Trajektorie.



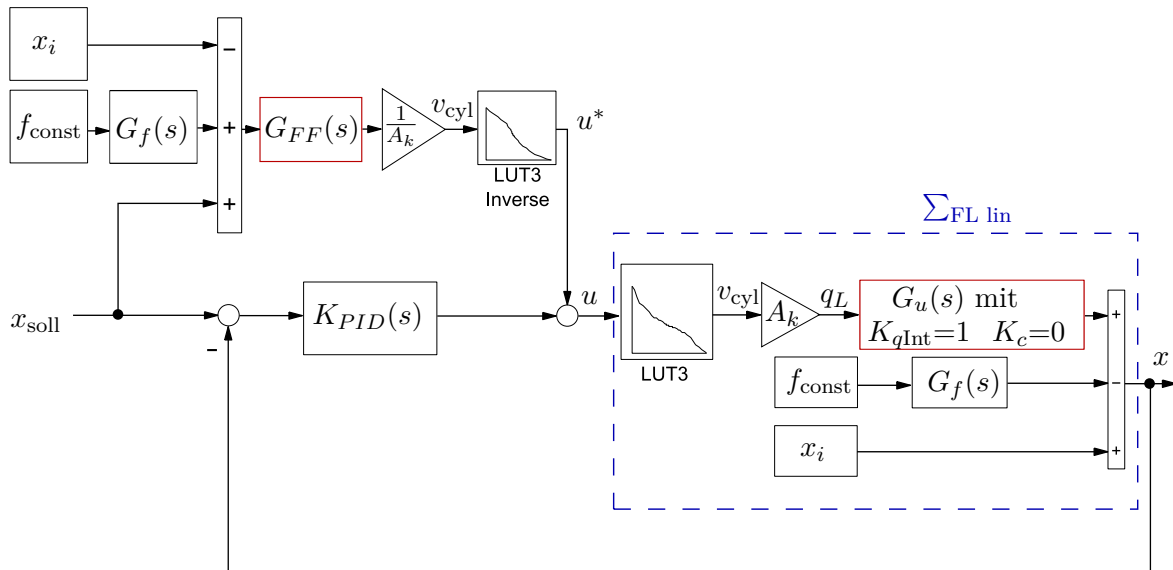


Abbildung 5.6: Blockschaltbild des linearen Modells des Leiterantriebs  $\Sigma_{\text{FL lin}}$  mit Zwei-Freiheitsgrade-Regelstruktur.

Tabelle 5.2: Ergebnis des Entwurfs der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung für das lineare Modell des Leiterantriebs  $\Sigma_{\text{FL lin}}$ .

Parameter	Wert	Bezeichnung
$k_P$	-4000	Verstärkungsfaktor des PID-Reglers
$k_I$	10	Integrationskonstante des PID-Reglers
$k_D$	2000	Dämpfungskonstante des PID-Reglers
$N$	5	Filterkoeffizient des PID-Reglers
$T$	0.0588	Zeitkonstante der Vorsteuerung

der relativen Grad von  $G_u(s)$  ist  $r = 3$ . Unter Berücksichtigung der Ventilkennlinie aus Abbildung 4.18 lässt sich das lineare Leitermodell  $\Sigma_{\text{FL lin}}$  mit der Zwei-Freiheitsgrade-Regelstruktur modellieren. In Abbildung 5.6 ist das Blockschaltbild dargestellt. Der  $PID$ -Regler  $K_{PID}(s)$  hat die Struktur aus (5.5). Das lineare System wird an der Stelle

$$\phi_{L0} = 45^\circ \quad \text{bzw.} \quad x_0 = 0.759 \text{ m} \quad (5.8)$$

berechnet und simuliert. Für die Regelung und Vorsteuerung ergeben sich die entworfenen Parameter, die in Tabelle 5.2 aufgelistet sind.

In Abbildung 5.7 ist das Simulationsergebnis der schrittweise entworfenen Regelstruktur anhand des linearen Modells dargestellt. Anhand dem Verlauf der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\phi}_L$  ist erkennbar, dass die Schwingungen des geregelten Systems fast vollständig kompensiert werden. Ohne die Vorsteuerung wird die vorgegebene Position  $x$  bzw. der Leiterwinkel  $\phi_L$  erst nach einigen Sekunden erreicht, da der Regler nicht schnell genug

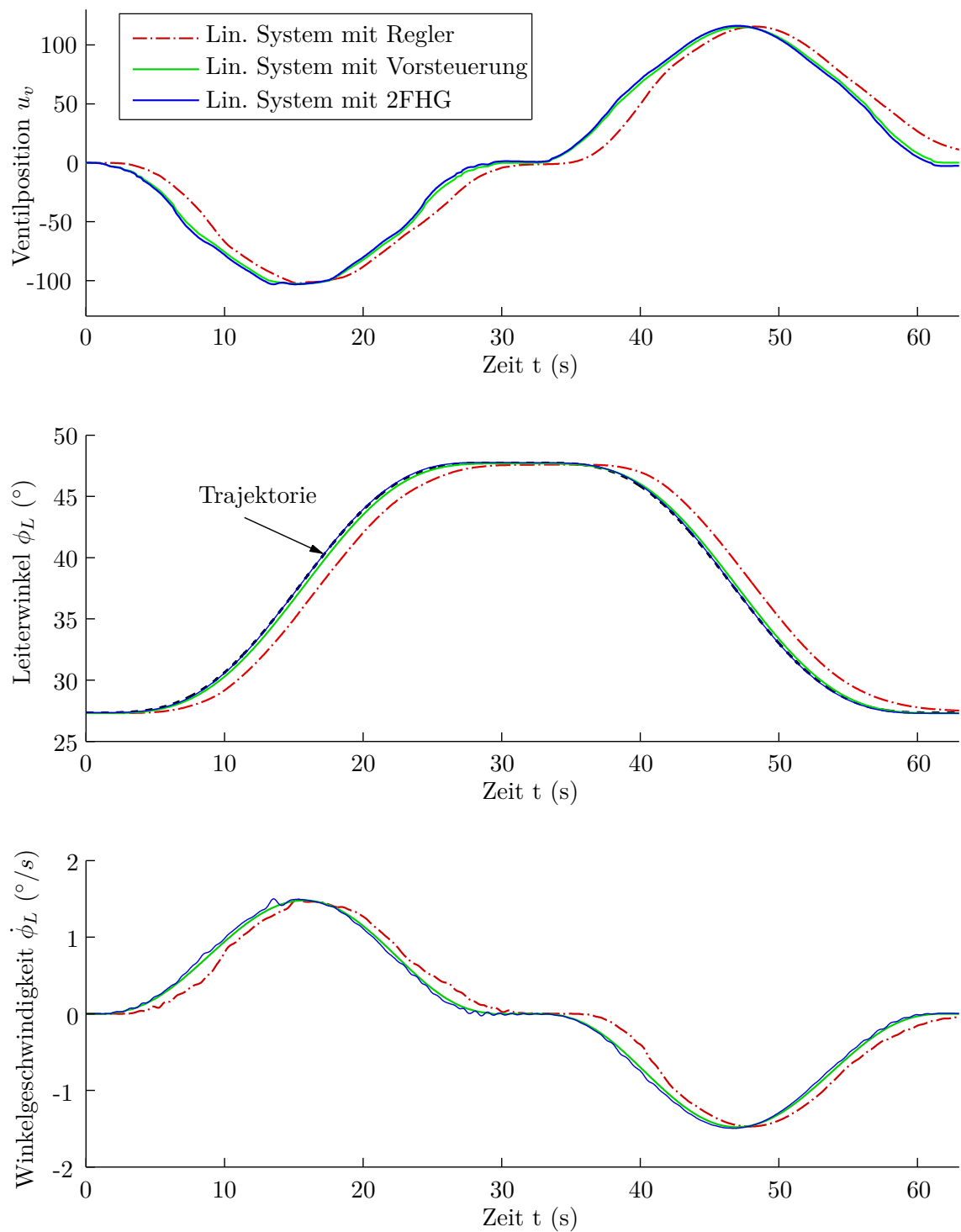


Abbildung 5.7: Simulationsergebnis des linearen Modells des Leiterantriebs  $\Sigma_{FL \text{ lin}}$  mit Zwei-Freiheitsgrade-Regelstruktur.

auf die Bewegungsänderung reagiert. Durch die Vorsteuerung mit dem Vorfilterzeitkonstante  $T$  kann eine schnellere Folgerregelung erreicht werden. Da das nichtlineare System aber eine Stellgrößenbeschränkung aufweist, darf die Regelstruktur auch nur so schnell ausgelegt werden, sodass die Stellgröße nicht überschritten wird und trotzdem eine wesentliche Dämpfung der Schwingungen stattfindet.

### 5.3.2 Nichtlineares Modell mit Zwei-Freiheitsgrade-Regelung

Im Folgenden wird die entworfene Regelstruktur am nichtlinearen Leitermodell  $\Sigma_{\text{FL}}$  getestet. Hierzu wird das lineare Modell  $\sigma_{\text{FL lin}}$  in Abbildung 5.6 durch das Modell entsprechend Abbildung 4.8 ausgetauscht. Die Simulationsergebnisse des nichtlinearen Modells im Vergleich zum linearen Modell sind in Abbildung 5.8 dargestellt. In Tabelle 5.2 sind die zugehörigen Reglerparameter aufgelistet. Das nichtlineare System zeigt wie auch das lineare System im Wesentlichen ein sehr gutes Trajektorien-Folgeverhalten. Die Trajektorie wurde so geplant, dass das nichtlineare System beim Neigen der Leiter nicht an die Grenzen der Stellgrößenbeschränkung kommt. Während dem Aufrichten der Leiter treten beim nichtlinearen Modell größere Schwingungen auf als beim linearen. Dies ist vor allem am Verlauf der Winkelgeschwindigkeit  $\phi_L$  erkennbar.

Eine mögliche Erklärung dafür ist die Berechnung der Vorsteuerung anhand des linearisierten Modells an einer Stelle  $x_0 = 0.759 \text{ m}$  bzw.  $\phi_{L0} = 45^\circ$ . Weicht der Arbeitspunkt zu stark von dem Linearisierungspunkt  $x_0$  ab, so verhält sich die Vorsteuerung fehlerhaft, da die verwendete Eigenfrequenz und Dämpfungen nicht mehr mit dem nichtlinearen Modell übereinstimmen. Ein weiterer Grund für die Abweichung ist das Vernachlässigen mehrerer Terme bei der Herleitung der Übertragungsfunktion in Gleichung (4.3).

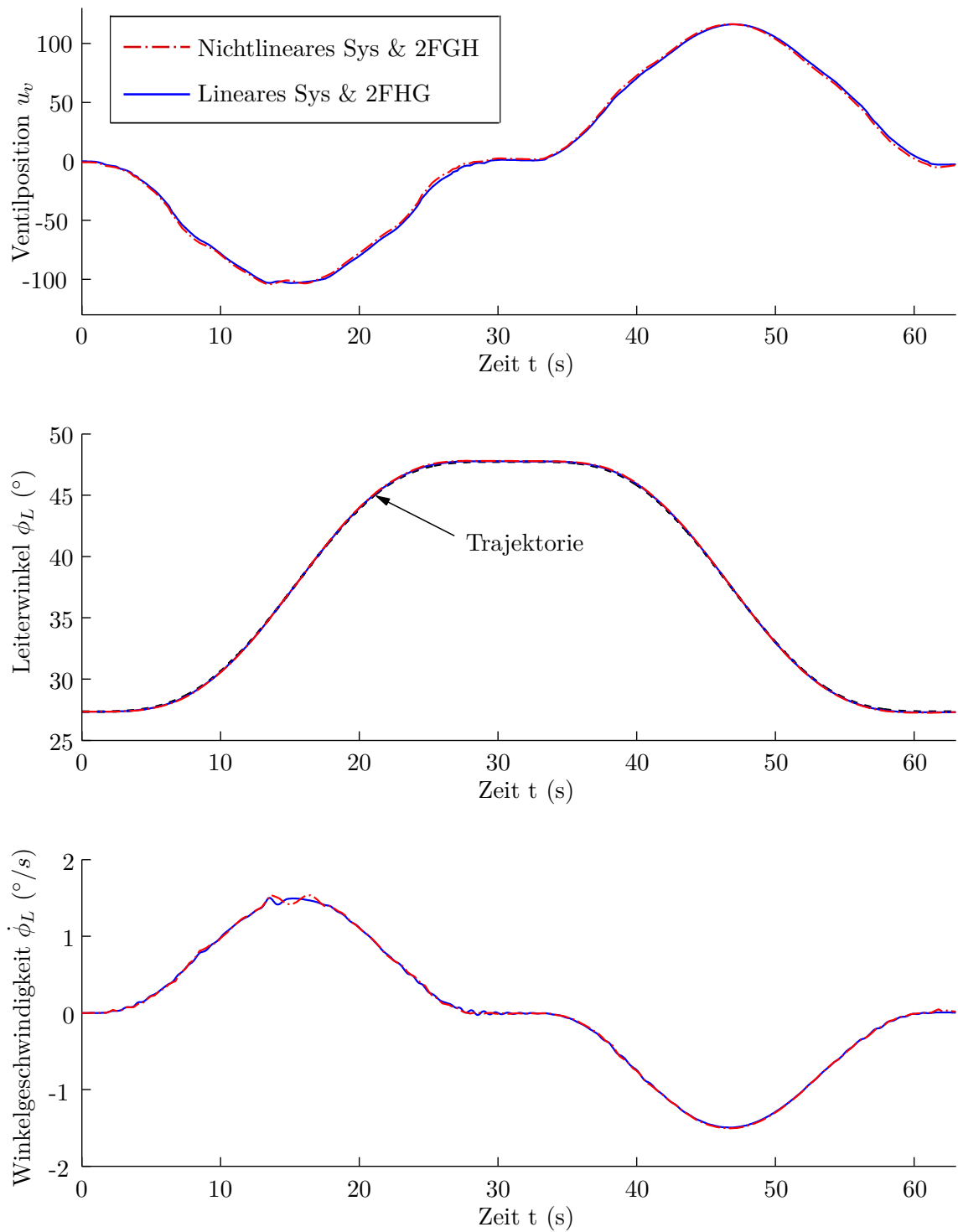


Abbildung 5.8: Simulationsergebnis des nichtlinearen  $\Sigma_{FL}$  und linearen Modells  $\Sigma_{FL \text{ lin}}$  des Leiterantriebs mit Zwei-Freiheitsgrade-Regelstruktur.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit befasst sich mit der Dynamikuntersuchung des hydraulischen Antriebs einer Feuerwehrdrehleiter. Basierend auf dem theoretisch entwickelten Modell wurde eine Trajektorien-Folgeregung mit Kompensation des Hydraulikeinflusses entworfen.

Zunächst wurde die Modellierung von grundlegenden hydraulischen Systemkomponenten vorgestellt. Anhand des Beispielmotors eines hydraulisch angeregten Ein-Massen-Schwingers wurde anschließend die prinzipielle Modellierung eines Hydraulikkreises aufgezeigt. Dabei ließ sich neben der Modellierung des nichtlinearen Hydrauliksystems auch ein lineares Modell herleiten. In dem darauf folgenden Teil wurde ein Modell der Feuerwehrleiter hergeleitet. Dies setzt sich aus dem mechanischen Leitermodell und dem hydraulischen Antriebsmodell zusammen. Zur Identifizierung von unbekanntem Systemparametern und zur Validierung des entwickelten Modells wurden Messdaten herangezogen. Anschließend ist zur Vorbereitung des Reglerentwurfs ein lineares Gesamtmodell des Leiterantriebs hergeleitet worden. Die unbekanntem Parameter ließen sich mit Hilfe des nichtlinearen Modells und den aufgezeichneten Messdaten identifizieren. Zusätzlich wurde die Eigenfrequenz und das Lehr'sche Dämpfungsmaß des linearen Modells für den gesamten Arbeitsbereich des Leiterwinkels  $\phi_L$  der Feuerwehrleiter berechnet und dargestellt.

Schließlich wurde das Konzept einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelung vorgestellt und an dem theoretischen Modell des Ein-Massen-Schwingers getestet. Die resultierende Folgeregelung ermöglicht eine Positionsvorgabe der schwingenden Masse anhand einer geplanten Trajektorie. Analog dazu wurde die Trajektorien-Folgeregung für die Vorgabe des Feuerwehrleiterwinkels entwickelt. Die dabei verwendete Vorsteuerung konnte – unabhängig vom Regler – anhand des linearen Antriebsmodells entworfen werden. Schlussendlich ließ sich die Regelstruktur am nichtlinearen Leiterantriebsmodell testen. Die Simulationsergebnisse des Systems zeigen ein gutes Folgeverhalten und sehr geringe Schwingungen in der Hydraulik auf.

Als problematisch erweist sich dabei, dass die entworfene Vorsteuerung nur an einem Arbeitspunkt berechnet wurde. Außerdem weist das dynamische System eine Stellgrößenbeschränkung auf, die sich bei schnelleren Arbeitspunktwechseln bemerkbar macht. Mit der entwickelten Folgeregelung konnten die hydraulischen Einflüsse zwar vermindert aber nicht an allen Stellen einer vorgegebenen Trajektorie vollständig kompensiert werden.

In einer weiterführenden Arbeit können diese Probleme aufgegriffen werden. Mit Hilfe des entwickelten linearen und nichtlinearen Modells können auch andere regelungstechnischen Methoden zur Kompensation von Hydraulikeinflüssen verfolgt und getestet werden. Es könnte auch eine Leitersteuerung ausgelegt werden, die die Handhebelsignale vom Bedienstand so manipuliert, dass die Hydraulikschwingungen beim Rangieren der Leiter automatisch kompensiert werden. Außerdem sollte in einer weiterführenden Arbeit die Antriebsdynamik in der aktiven Schwingungsdämpfung mitberücksichtigt werden. Gegebenenfalls könnte der starre Leiterkörper auch durch eine flexible Struktur ersetzt werden.

# Anhang A

## Grundlagen der Strömungsmechanik

Für die Modellierung von hydraulischen Komponenten werden einige Grundgleichungen aus der Strömungsmechanik benötigt. Deshalb wird in diesem Teil des Anhangs auf die wichtigsten physikalischen Zusammenhänge und auf einige mathematischen Herleitungen eingegangen [Oer05] [Bro05].

### A.1 Kinematik der Fluide

Zur Beschreibung von Fluidbewegungen werden die Darstellungen von *Lagrange* und *Euler* herangezogen. Die folgenden Ausführungen stellen die Unterschiede der beiden Betrachtungsweisen dar.

#### A.1.1 Lagrange Methode

Bei einer Beschreibung nach *Lagrange* bewegt sich der Beobachter mit dem bewegten Fluidelement mit. Deshalb wird diese auch als *massen- oder teilchenfeste Betrachtung* bezeichnet. Die Bewegung eines Teilchens ist demnach vollständig beschrieben, wenn der Ortsvektor  $\boldsymbol{x}$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  bekannt ist. Durch Differentiation des Ortsvektors nach der Zeit resultiert die Geschwindigkeit  $\boldsymbol{c}$  dieses Teilchens,

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \left[ \frac{dx_1}{dt} \quad \frac{dx_2}{dt} \quad \frac{dx_3}{dt} \right]^T = \boldsymbol{c} . \quad (\text{A.1})$$

Entsprechend ergeben sich die Komponenten des Beschleunigungsvektors durch eine weitere Ableitung nach der Zeit. Bis auf wenige Ausnahmen interessiert jedoch nicht das Weg-Zeit-Gesetz einzelner Teilchen, sondern der Strömungszustand an einem Ort zu verschiedenen Zeiten. Hierfür eignet sich die nachfolgende Formulierung von *Euler*.

### A.1.2 Eulersche Methode und substantielle Ableitung

In der Strömungsmechanik ist es häufig vorteilhafter, das Strömungsfeld in einem *orts-festen* Volumen zu beschreiben, ohne dabei die Wege einzelner Teilchen explizit zu berücksichtigen. Diese Beschreibungsweise wird als *Eulersche Methode* bezeichnet. Danach ergibt sich die zeitliche Änderung einer ortsabhängigen skalaren Strömungseigenschaft  $f(\mathbf{x}, t)$  durch die Anwendung der Kettenregel zu

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} + \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \operatorname{grad} f . \quad (\text{A.3})$$

Beispiele hierfür sind die zeitlichen Änderungen der Dichte, des Drucks oder der Temperatur. Im Falle einer vektoriellen Strömungseigenschaft  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  lässt sich die zeitliche Änderung mit Hilfe der Jacobimatrix  $\mathbf{J}_f$  berechnen,

$$\underbrace{\frac{d\mathbf{f}}{dt}}_{\text{substantielles Glied}} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}}_{\text{lokales Glied}} + \underbrace{\underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}}_{\mathbf{J}_f} \underbrace{\frac{d\mathbf{x}}{dt}}_{\mathbf{c}}}_{\text{konvektives Glied}} . \quad (\text{A.4})$$

In der Literatur wird für die Darstellung des konvektiven Glieds auch häufig der *Nabla-Operator*  $\nabla$  in Kombination des Skalarproduktes verwendet oder auch ein sogenannter *Vektorgradient* eingeführt. Hierbei gilt

$$\mathbf{J}_f \mathbf{c} = \langle \mathbf{c}, \nabla \rangle \mathbf{f} = \mathbf{c} \operatorname{grad} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} c_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} c_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} c_3 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} c_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} c_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} c_3 \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} c_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} c_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} c_3 \end{bmatrix} . \quad (\text{A.5})$$

Die substantielle Ableitung des Geschwindigkeitsvektors  $\mathbf{c}$  nach der Zeit lässt sich außerdem mit der Divergenz beschreiben,

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{c} \left[ \frac{\partial c_1}{\partial x_1} + \frac{\partial c_2}{\partial x_2} + \frac{\partial c_3}{\partial x_3} \right] = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{c} \operatorname{div} \mathbf{c} . \quad (\text{A.6})$$

## A.2 Gleichungen der Stromfadentheorie

Die Stromfadentheorie ist ein Teilgebiet der Strömungsmechanik. Sie beschäftigt sich mit der eindimensionalen reibungsfreien Bewegung eines Teilchens entlang eines Stromfadens. Da zur Beschreibung der Strömung nur skalare Größen verwendet werden, lassen sich mit dieser Theorie einige grundlegenden Gleichungen der Strömungsmechanik sehr anschaulich herleiten.



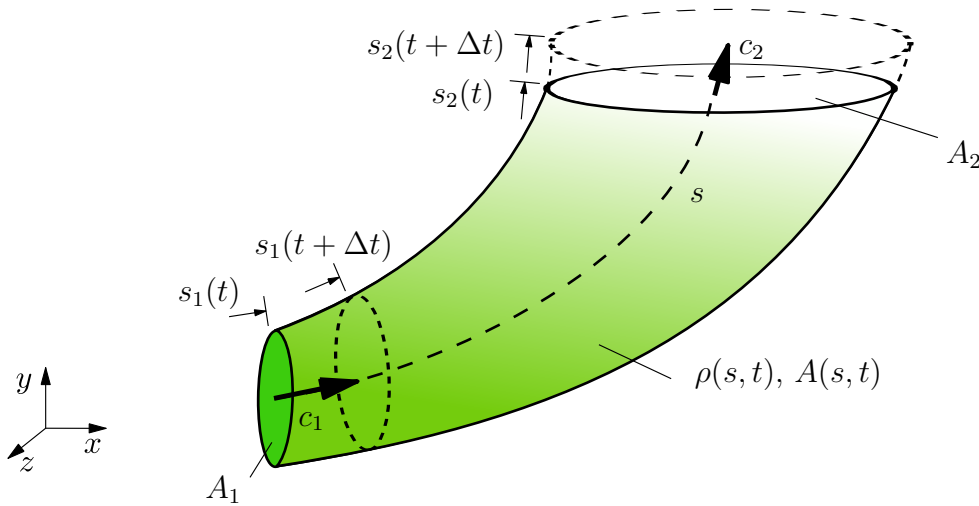


Abbildung A.1: Stromfaden bei veränderlichem Querschnitt

### A.2.1 Kontinuitäts-Gleichung

Die Massenerhaltung wird in der Strömungsmechanik mit der Kontinuitätsgleichung beschrieben. Diese lässt sich entweder mit einer *ortsfesten* oder *massenfesten* Betrachtung formulieren. Letztere wird im Folgenden für die Herleitung an einem Stromfadensegment zum Zeitpunkt  $t$  entsprechend Abbildung A.1 betrachtet. Mit der Stromfadenslänge  $s_2(t) - s_1(t)$ , der Dichte  $\rho$  und der sich ändernden Fläche  $A(s, t)$ , lässt sich die Masse durch eine Integration entlang des Stromfadensegments beschreiben,

$$m = \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} \rho(s, t) A(s, t) ds . \quad (\text{A.7})$$

Da die Masse eines materiellen Volumens konstant bleibt, gilt für ein solches materielles Stück eines Stromfadens

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{s_1(t)}^{s_2(t)} \rho(s, t) A(s, t) ds = 0 . \quad (\text{A.8})$$

Mit Hilfe der *Leibniz'schen Regel für Parameterintegrale* kann die Differentiation dieses Integralausdruckes, dessen Integrand und dessen Grenzen von der Zeit abhängen, berechnet werden, [Bro05]. Dies führt auf die allgemeine Form der Kontinuitätsgleichung

$$\int_{s_1(t)}^{s_2(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho A) ds + \rho_2 A_2 \underbrace{\frac{ds_2}{dt}}_{c_2} - \rho_1 A_1 \underbrace{\frac{ds_1}{dt}}_{c_1} = 0 . \quad (\text{A.9})$$

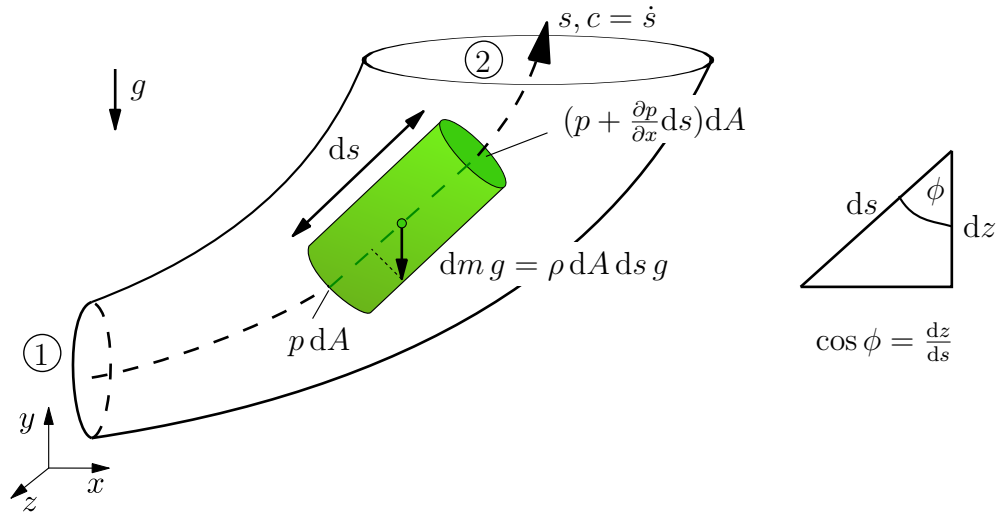


Abbildung A.2: Massenelement in instationärer reibungsfreier Strömung.

Die zeitlichen Änderungen der Stromfadenpositionen des Kontrollvolumens entsprechen dabei den skalaren Geschwindigkeiten  $c_1$  und  $c_2$ . Im Fall einer stationären Strömung ergibt sich die vereinfachte Form der Kontinuitäts-Gleichung zu

$$\dot{m} = \rho_2 A_2 c_2 = \rho_1 A_1 c_1 = \text{const.} , \quad (\text{A.10})$$

wobei für inkompressible Fluide noch die Vereinfachung  $\rho_1 = \rho_2 = \text{const.}$  hinzukommt.

### A.2.2 Euler-Gleichung

Die Dynamik eines Fluids entlang eines Stromfadens kann mit Bilanzgleichungen in differentieller Form allgemein beschrieben werden. Hierzu wird im Folgenden die inkompressible und instationäre Eulergleichung für ein infinitesimal kleines Element anhand Abbildung A.2 hergeleitet.

Das Kräftegleichgewicht für das Massenelement  $dm$  mit der Geschwindigkeit  $c$ , welches um den Winkel  $\phi$  geneigt ist, ergibt sich zu

$$\begin{aligned} dm \frac{dc}{dt} &= \sum dF_s \\ \rho dA ds \frac{dc}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial s} ds dA - \rho dA ds g \cos \phi \\ \Leftrightarrow \frac{dc}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \cos \phi . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Mit der Geschwindigkeit  $c$ , der Dichte  $\rho$ , der Fläche  $dA$ , dem Stromfadenstück  $ds$ , dem Druck  $p$  und der Gravitationsbeschleunigung  $g$ . Durch das Berechnen der substantiellen Ableitung

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial s} \quad (\text{A.12})$$

und der Winkelbeziehung aus Abbildung A.2 ergibt sich daraus die *Euler-Gleichung* in differentieller Form zu

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{dz}{ds} . \quad (\text{A.13})$$

### A.2.3 Bernoulli-Gleichung

Für stationäre Strömungen entfällt das lokale Geschwindigkeitsglied  $\partial c/\partial t$  aus der Gleichung (A.13) und durch Integration längs eines Stromfadens 1 – 2 resultiert die sogenannte *Bernoulli-Gleichung*,

$$\int_1^2 \left( c \, dc - \frac{1}{\rho} \, dp + g \, dz \right) = \frac{1}{2} (c_2^2 - c_1^2) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho} \, dp + g(z_2 - z_1) = 0 . \quad (\text{A.14})$$

Unter Annahme einer konstanten Dichte ergibt sich die *Bernoulli-Gleichung für stationäre inkompressible* Strömungen entlang des Stromfadens,

$$\frac{c^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho}{2} c^2 + p + \rho g z = \text{const.} . \quad (\text{A.15})$$

## A.3 Impulssatz

Die bisher hergeleiteten Gleichungen basieren auf der reibungsfreien Stromfadentheorie, die aber nicht immer anwendbar ist. Mit Hilfe des Impulssatzes kann hingegen nahezu jeder Strömungszustand beschrieben werden. Die differentielle Form des Impulssatzes wird als *Navier-Stokes Gleichung* bezeichnet, [Oer05]. Im Folgenden wird jedoch der Impulssatz in integraler Form hergeleitet.

Entsprechend dem Impulssatz der technischen Mechanik ist die zeitliche Änderung des Impulses  $\mathbf{I}$  gleich den resultierenden äußeren Kräfte  $\mathbf{f}_a$ . Für die diskreten Massenpunkte  $m_1$  bis  $m_n$ , die sich mit den Geschwindigkeitsvektoren  $\mathbf{c}_i$  im Raum bewegen, ergibt sich somit

$$\frac{d}{dt} \mathbf{I} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{c}_i = \sum \mathbf{f}_a . \quad (\text{A.16})$$

Da die Masseteilchen mit der Dichte  $\rho$  ein Kontinuum bilden, können die Summen in Volumen- und Flächenintegrale über einem Kontrollvolumen  $V$  umformuliert werden. Für die linke Seite der Gleichung (A.16) folgt somit

$$\frac{d}{dt} \mathbf{I} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{c} \, dV = \int_V \frac{d\rho \mathbf{c}}{dt} \, dV . \quad (\text{A.17})$$

Hierbei stellt  $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$  das Geschwindigkeitsfeld dar, welches abhängig von dem Ortsvektor  $\mathbf{x}$  und der Zeit  $t$  ist. Die sogenannte substantielle Ableitung lässt sich in eine

lokale und eine konvektive Beschleunigung entsprechend Gleichung (A.6) aufgespalten, somit folgt

$$\frac{d\rho\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial\rho\mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{c} \operatorname{div}(\rho\mathbf{c}) . \quad (\text{A.18})$$

Aus den Gleichungen (A.17) und (A.18) ergibt sich nun

$$\int_V \frac{d\rho\mathbf{c}}{dt} dV = \int_V \frac{\partial\rho\mathbf{c}}{\partial t} dV + \int_V \mathbf{c} \operatorname{div}(\rho\mathbf{c}) dV . \quad (\text{A.19})$$

Mit dem Integralsatz von Gauß, [Bro05],

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{f}) dV = \int_A \langle \mathbf{f}, \mathbf{n} \rangle dA , \quad (\text{A.20})$$

kann ein Volumenintegral über der Divergenz eines Vektorfeldes  $\mathbf{f}$  in ein Oberflächenintegral über die zum Rand orthogonalen Vektorfeld-Anteile umgeformt werden. Die Variable  $\mathbf{n}$  stellt dabei das Normaleneinheitsfeld auf den Rand der Fläche  $A$  dar, auf das mit Hilfe des Skalarprodukts projiziert wird.

Mit der Anwendung von Gleichung (A.20) auf Gleichung (A.19) lässt sich nun der *Impulssatz in integraler Form* in der Eulerschen Darstellung formulieren,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho\mathbf{c} dV + \int_A \rho\mathbf{c} \langle \mathbf{c}, \mathbf{n} \rangle dA = \sum \mathbf{f}_a . \quad (\text{A.21})$$

Die rechte Seite stellt die äußeren Kräfte dar, die der Impulsänderung das Gleichgewicht halten. Sie setzen sich zusammen aus

$$\sum \mathbf{f}_a = \underbrace{\int_V \rho\mathbf{g} dV}_{\text{Schwerkräfte}} - \underbrace{\int_A p\mathbf{n} dA}_{\text{Druckkräfte}} - \underbrace{\int_A \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{n} \rangle dA}_{\text{Reibungskräfte}} + \underbrace{\sum \mathbf{f}_s}_{\text{Stützkräfte}} . \quad (\text{A.22})$$

Dabei ist  $\mathbf{g}$  das Gravitationsfeld,  $p$  der Druck, der Ausdruck  $\boldsymbol{\tau}$  stellt den *Cauchy-Schubspannungstensor* für eine reibungsbehaftete Strömung dar und die Stützkraft  $\mathbf{f}_s$  kann beispielsweise eine Kraft auf eine Wand sein.

## A.4 Hydraulikflüssigkeiten

Hydraulikflüssigkeiten werden eingesetzt um Leistung zu übertragen und Bewegungen zu erzeugen. Dabei wird Energie durch ein unter Druck stehendes Fluid innerhalb eines Kreislaufs geleitet und durch Hydraulikleitungen übertragen. Im Folgenden werden die wichtigsten Anforderungen und physikalischen Eigenschaften dargestellt.

Tabelle A.1: Anforderungen an Hydraulikflüssigkeiten, vgl. [WSG99].

<b>Aspekt</b>	<b>Anforderung</b>
Funktionalität	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Leistungsübertragung mit hoher Leistungsdichte und geringen Verlusten</li> <li>– gute Schmierfähigkeit → Sicherstellung eines tragfähigen Schmierfilms (gutes Viskositäts-Druck-Verhalten/Benetzungsvermögen)</li> <li>– angemessene Viskosität mit geringer Temperaturabhängigkeit</li> <li>– gut filtrierbar</li> </ul>
Betriebssicherheit	<ul style="list-style-type: none"> <li>– schwer entflammbar</li> <li>– chemische Verträglichkeit (z.B. mit Dichtungen)</li> <li>– gutes Luftabscheidevermögen</li> </ul>
Umwelt	<ul style="list-style-type: none"> <li>– keine Schädigung der Umwelt im Falle einer Leckage</li> <li>– keine toxischen Wirkungen auf Menschen</li> <li>– hohe Altersbeständigkeit und thermische Stabilität</li> </ul>

### A.4.1 Anforderungen und Kategorisierung

Die Funktionalität, Betriebssicherheit und Umweltverträglichkeit hydraulischer Anlagen hängt vor allem von den spezifischen Eigenschaften der Hydraulikflüssigkeit ab. Die in hydraulischen Systemen eingesetzten Flüssigkeiten müssen eine Vielzahl von Aufgaben erfüllen. Sie übertragen Kräfte, schmieren die beweglichen Geräteteile, kühlen, schützen vor Korrosion und sorgen für die Dämpfung etwaiger Schwingungen sowie den Abtransport von Verunreinigungen. Die wichtigsten Anforderungen sind in Tabelle A.1 zusammengefasst.

Aufgrund der unterschiedlichen Ansprüche können Hydraulikflüssigkeiten längst nicht mehr nur aus reinen Mineralölen oder gar Wasser bestehen. Beispielsweise sind einige Mineralöle leicht entflammbar und im Fall einer Leckage extrem umweltbelastend. Deshalb werden dem Mineralöl spezielle chemische Zusätze beigemischt oder andere Grundflüssigkeiten verwendet. In der Stahl- und Gießereiindustrie werden zum Beispiel schwer entflammbare wässrige Polymerlösungen oder synthetische Flüssigkeiten, hergestellt aus Alkoholen, eingesetzt. Bei biologisch schneller abbaubaren Hydraulikölen handelt es sich meist um esterbasische Syntheseöle.

Die Bezeichnung, Zusammensetzung und Einteilung der marktüblichen Druckflüssigkeiten ist zur Übersicht in Tabelle A.2 mit zugehörigen Normen und Richtlinien aufgeführt.

Tabelle A.2: Übersicht der marktüblichen Hydraulikflüssigkeiten, vgl. [WSG99].

<b>Eigenschaft</b>	<b>Bez.</b>	<b>Zusammensetzung</b>
mineralölbasiert	H	ohne Additive
	HL	mit Additiven zur Korrosionsminderung
	HLP/HM	HL mit Additiven zur Verschleiß- und Reibungsminderung
	HVLP/HV	HLP mit verbessertem Viskositäts-Temperatur-Verhalten
	HLPD	HLP mit gutem Partikeltransport
	<i>Normen:</i>	<i>DIN 51517/T.1-3, ISO 6743-4</i>
schwer entflammbar	HFA-E	Öl-in-Wasser-Emulsion
	HFA-S	ölfreie Konzentrate-in-Wasser-Lösung
	HFB	Wasser-in-Öl-Emulsion, Wassergehalt $\approx 45\%$
	HFC	wässrige Polymerlösung, Wassergehalt $> 35\%$
	HFD	wasserfreie synthetische Flüssigkeiten
	<i>Normen:</i>	<i>DIN EN 982, CETOP/RP 77 H, VDMA 24320</i>
biologisch abbaubar	HETG	native Öle, meist Rapsöl
	HEES	synthetische Flüssigkeiten, aus Alkoholen
	HEPG	synthetische Flüssigkeiten, Polyglykole
	<i>Normen:</i>	<i>VDMA-Einheitsblatt 24568</i>

## A.4.2 Physikalische Eigenschaften

Hydraulikflüssigkeiten können anhand verschiedener physikalischer Kenngrößen charakterisiert werden. Im Folgenden werden die physikalischen Zusammenhänge der Kompressibilität, Dichte und Viskosität eines Druckmittels vorgestellt.

### Kompressibilität und Dichte

Bei niedrigem Druck können Flüssigkeiten im Gegensatz zu Gasen häufig als inkompressibel betrachtet werden, d.h. die Dichte wird als konstant angenommen. Die geringe Nachgiebigkeit von Flüssigkeiten darf jedoch bei großen Volumina unter hohem Druck und bei großen Temperaturänderungen nicht vernachlässigt werden [Man05].

Die Dichte  $\rho$  beschreibt den Zusammenhang zwischen der Masse  $m$  und dem Volumen  $V$ . Eine partielle Volumenzunahme  $\partial V$  in Folge einer Dichteänderung  $\partial \rho$  ergibt sich zu

$$V = \frac{m}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{m}{\rho^2}. \quad (\text{A.23})$$

Der isobaren Wärmeausdehnungskoeffizient beschreibt die Volumenzunahme von Fluiden bei einer Temperaturänderung  $\partial T$  und ist definiert als

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad (\text{A.24})$$

wobei der Index 0 den Anfangszustand der jeweiligen Kenngrößen bezeichnet. Anhand der Dichte lässt sich der Wärmeeinfluss deutlich veranschaulichen. Für eine Temperaturänderung von  $\Delta T$  gegenüber der Referenztemperatur ergibt sich diese zu

$$\rho(\Delta T) = \frac{m}{V_0 + \Delta V} = \frac{\rho_0}{1 + \alpha \Delta T}. \quad (\text{A.25})$$

Analog hierzu lässt sich mit der isothermen Kompressibilität  $\kappa$  die Elastizität bzw. mit dem Kompressionsmodul  $\beta$  (in der Literatur auch als  $K$  bzw.  $E$  bezeichnet) die Steifigkeit einer Flüssigkeit charakterisieren,

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\beta}. \quad (\text{A.26})$$

Für eine Druckänderung  $\Delta p$  berechnet sich beispielsweise die Dichte mit

$$\rho(\Delta p) = \frac{m}{V_0 + \Delta V} = \frac{\rho_0}{1 - \kappa \Delta p}. \quad (\text{A.27})$$

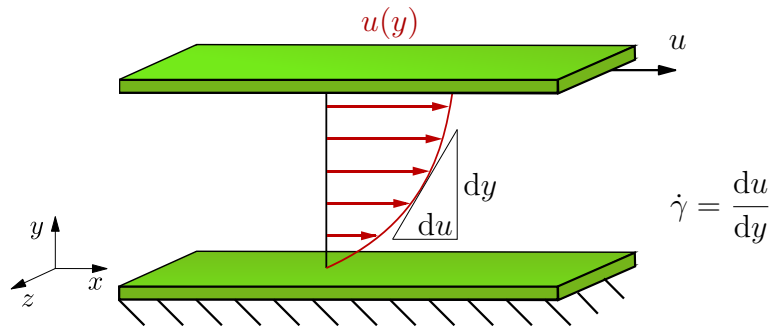


Abbildung A.3: Darstellung einer ebenen Scherströmung (Couette-Strömung).

## Viskosität

Die Viskosität charakterisiert die Zähflüssigkeit von Fluiden. Die dynamische Viskosität  $\eta$  stellt das Verhältnis von Schubspannung  $\tau$  zu Schergeschwindigkeit  $\dot{\gamma}$  dar,

$$\tau = \eta \dot{\gamma} . \quad (\text{A.28})$$

Mit Hilfe einer ebenen Scherströmung zwischen einer ruhenden und einer mit der Geschwindigkeit  $u$  bewegten Platte lässt sich die Schergeschwindigkeit in Abbildung A.3 veranschaulichen. Dabei kann sie als die Steigung des Strömungsgeschwindigkeitsprofils  $u(y)$  interpretiert werden,

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} . \quad (\text{A.29})$$

Das Verhältnis der dynamischen Viskosität  $\eta$  und der Dichte  $\rho$  wird als kinematische Viskosität  $\nu$  bezeichnet,

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} . \quad (\text{A.30})$$

In dieser Arbeit wird die Reibung der Hydraulikflüssigkeit vernachlässigt, deshalb wird die Viskosität im Folgenden nicht mehr berücksichtigt.

## A.5 Ergänzung zur Ventilmodellierung: Strömungskräfte

Für die Analyse der Schieberbewegung können auch die Kräfte beim Öffnen und Halten einer Ventilschieberstellung genauer untersucht werden. Hierzu müssen die Strömungskräfte der Flüssigkeit genauer betrachtet werden. Im Folgenden wird die dynamische Modellierung eines Ventils ergänzend zu Kapitel 2.2 vorgestellt.



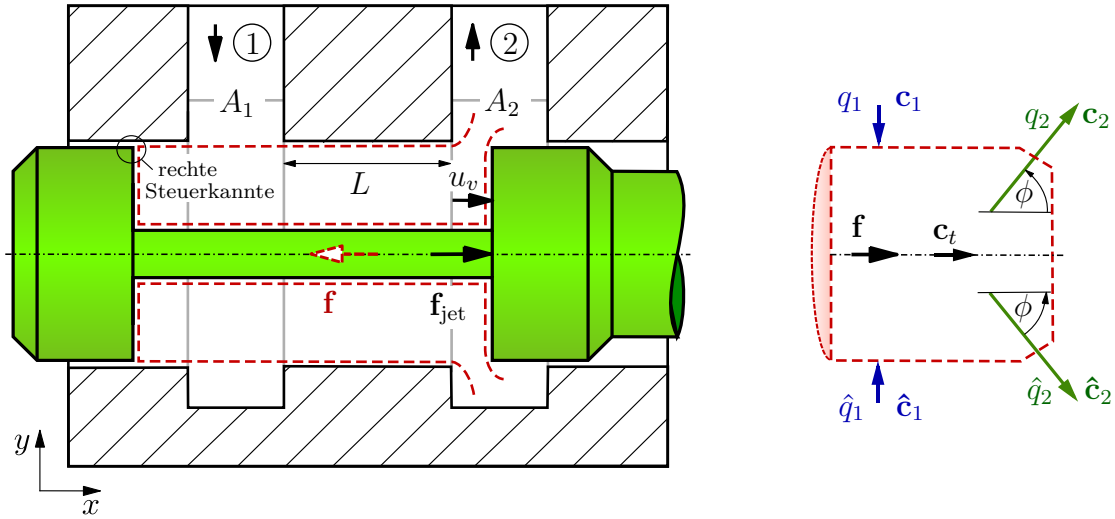


Abbildung A.4: Kontrollvolumen zur Berechnung der Strömungskräfte am 2/2-Wegeventil.

### A.5.1 Herleitung der Strömungskräfte am Ventil

Mit Hilfe des Impulssatzes in integraler Form (Herleitung siehe (A.21)) lässt sich die resultierende vektorielle Strömungskraft für ein Kontrollvolumen  $V$  mit der Dichte  $\rho$  und der Fläche  $S$  allgemein wie folgt berechnen,

$$\mathbf{f} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{c} dV}_{\mathbf{f}_t} + \underbrace{\int_S \rho \mathbf{c} (\mathbf{c} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\mathbf{f}_s} . \quad (\text{A.31})$$

Der Kraftvektor  $\mathbf{f}_t$  ist hierbei die instationäre Impulskraft,  $\mathbf{f}_s$  ist die stationäre Impulskraft,  $\mathbf{c}$  das Geschwindigkeitsfeld der Strömung und  $\mathbf{n}$  das Normaleneinheitsfeld auf den Rand des Volumenelements.

Das in Abbildung A.4 dargestellte rotationssymmetrische Kontrollvolumen wird im Folgenden in einer repräsentativen Schnittebene und ohne Berücksichtigung der Kolbenstange betrachtet. Die Geschwindigkeiten der ein- und austretenden Volumenströme werden in der durchströmten Fläche als konstant angenommen und sind am oberen Schnittufer durch die Vektoren  $\mathbf{c}_i$  und an der gegenüberliegenden Seite durch die Vektoren  $\hat{\mathbf{c}}_i$  diskretisiert. Somit ergibt sich mit (A.31) die resultierende Kraft in der Ebene zu

$$\mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{c}_i A_i L + \rho \mathbf{c}_1 (\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{n}_1) \frac{A_1}{2} + \rho \hat{\mathbf{c}}_1 (\hat{\mathbf{c}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1) \frac{A_1}{2} + \rho \mathbf{c}_2 (\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{n}_2) \frac{A_2}{2} + \rho \hat{\mathbf{c}}_2 (\hat{\mathbf{c}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2) \frac{A_2}{2} . \quad (\text{A.32})$$

Die Länge  $L$ , die repräsentativ durchströmten Flächen  $A_i$  und Geschwindigkeiten  $\mathbf{c}_i$  sind in Abbildung A.4 dargestellt. Die Vektoren  $\mathbf{n}_i$  bezeichnen Einheitsvektoren orthogonal zum Rand der durchströmten Flächen. Aufgrund der Rotationssymmetrie

kompensieren sich die gegenüber wirkenden Impulskräfte, da gilt  $\mathbf{c}_1 + \hat{\mathbf{c}}_1 = \mathbf{0}$ . Mit den Vektoren

$$\mathbf{c}_t = \begin{bmatrix} c_t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_2 \cos \phi \\ c_2 \sin \phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.33a})$$

$$\hat{\mathbf{c}}_2 = \begin{bmatrix} c_2 \cos \phi \\ -c_2 \sin \phi \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{n}}_2 = \begin{bmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \end{bmatrix} \quad (\text{A.33b})$$

folgt für das Skalarprodukt  $\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \hat{\mathbf{c}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 = c_2$ . Somit vereinfacht sich (A.32) zu

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho L \frac{\partial}{\partial t}(A_t c_t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho A_s c_s^2 \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

Der Strömungsquerschnitt in ② lässt sich auch in Abhängigkeit des Ventilöffnungsquerschnittes  $A$  als  $A_2 = A C_d$  ausdrücken (siehe (2.10)). Mit dem Volumenstrom  $q_2$  aus der Kontinuitätsgleichung (2.11)

$$q_2 = A_1 c_1 = A_t c_t = A_2 c_2 = A C_d c_2, \quad (\text{A.35})$$

ergibt sich nun die nötige Kolbenkraft in  $x$ -Richtung zu

$$f_x = \underbrace{\rho L \frac{\partial q_2}{\partial t}}_{f_{tx}} + \underbrace{\rho \frac{q_2^2}{A C_d} \cos \phi}_{f_{sx}}. \quad (\text{A.36})$$

Wird beim Öffnen oder Schließen des Ventils die Beschleunigung des Volumenstroms  $q_s$  nicht berücksichtigt, so entfällt die instationäre Strömungskraft  $f_{tx}$ . Der Austrittswinkel  $\phi$  der Strömung hängt von der Geometrie der Auslaufkanten und der Fertigungsgenauigkeit ab. An Steuerschiebern in Wegeventilen liegt er im Bereich von  $\phi = 65^\circ \dots 75^\circ$ , [FF94].

## A.5.2 Schieberkraft und Dynamik des Ventilkolbens

Die entsprechende Strömungskraft auf den Ventilkolben besitzt den gleichen Betrag wie die resultierende Strömungskraft des Kontrollvolumens, jedoch umgekehrtes Vorzeichen,

$$f_{\text{jet}} = -f_x = -f_{tx} - f_{sx}. \quad (\text{A.37})$$

Mit der Änderung der Strömungsrichtung ändert sich das Vorzeichen der instationären Strömungskraft  $f_{tx}$ , wohingegen die stationäre Strömungskraft  $f_{sx}$  unabhängig von der Strömungsrichtung immer so gerichtet ist, dass der Öffnungsquerschnitt verringert bzw. das Ventil zugezogen wird, [Kem12]. Die Vorzeichen der Kraftkomponenten für die verschiedenen Ventilstellungen bzw. Steuerkanten und Strömungsrichtungen sind in Abbildung A.5 aufgezeigt.

Für die Untersuchung der Ventildynamik beim Schaltvorgang kann der Ventilkolben wie in Abbildung A.6 dargestellt modelliert werden. Die Impulsbilanz [Sch90] am frei-

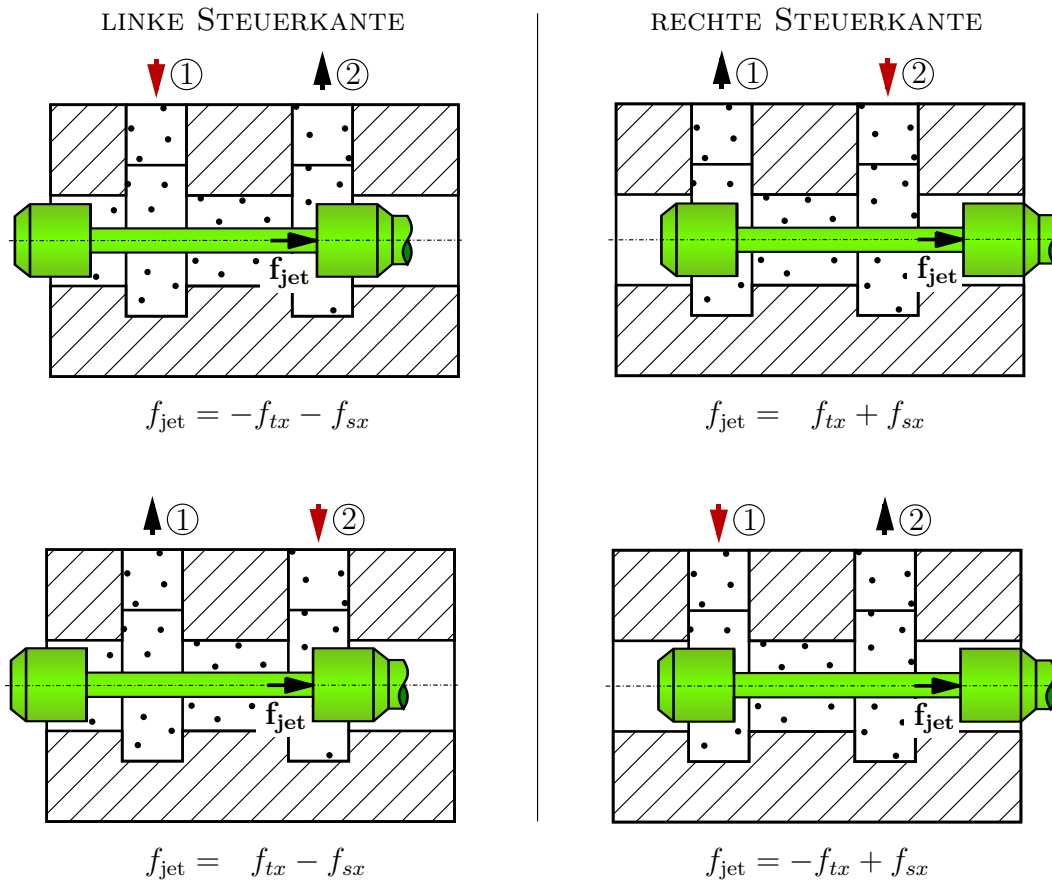


Abbildung A.5: Zusammensetzung der Schieberkraft für mögliche Ventilstellungen und Strömungsrichtungen an einem 2/2-Wegeventil.

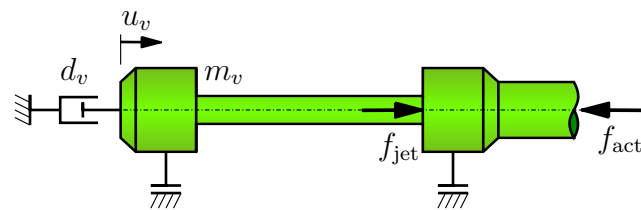


Abbildung A.6: Mechanische Modellierung des Ventilkolbens.

geschnittenen Kolben mit der Masse  $m_v$  liefert dann unter Berücksichtigung einer externen Betätigungskraft  $f_{\text{act}}$  die Bewegungsgleichung

$$m_v \ddot{u}_v + d_v \dot{u}_v = f_{\text{jet}} - f_{\text{act}} . \quad (\text{A.38})$$

Hierbei wird die viskose Dämpfung des Ventilkolbens mit  $d_v$  charakterisiert. Im Fall eines elektromechanischen Ventils wird die Betätigungskraft mittels einer Spule über ein elektromagnetisches Feld auf den Ventilkolben appliziert.

### A.5.3 Schieberkraft am 3/3 und 4/3-Wegeventil

Unter Beachtung der Vorzeichen gemäß Abbildung A.5 und Gleichung (A.36), resultiert die Kolbenkraft  $f_{\text{jet}}$  für ein 3/3-Wegeventil aus den Strömungskräften,

$$f_{\text{jet}} = f_S + f_T, \quad \text{mit} \quad (\text{A.39})$$

$$f_S = -\rho L \frac{\partial q_S}{\partial t} - \rho \frac{q_S^2}{A_S C_d} \cos \phi \quad (\text{A.39a})$$

$$f_T = -\rho L \frac{\partial q_T}{\partial t} + \rho \frac{q_T^2}{A_T C_d} \cos \phi . \quad (\text{A.39b})$$

Unter Beachtung der Vorzeichen (siehe Abbildung 2.6 und (A.36)), resultiert die Kolbenkraft  $f_{\text{jet}}$  für ein 4/3-Wegeventil aus den Strömungskräften,

$$f_{\text{jet}} = \rho L \frac{\partial}{\partial t} (-q_1 - q_2 + q_3 + q_4) + \frac{\rho \cos \phi}{C_d} \left( \frac{q_1^2}{A_1} - \frac{q_2^2}{A_2} + \frac{q_3^2}{A_3} - \frac{q_4^2}{A_4} \right) . \quad (\text{A.40})$$

# Anhang B

## Bestimmung von polynomialen Referenz-Trajektorien

Im Bereich der Simulationstechnik müssen oft Referenz-Trajektorien vorgegeben werden. Insbesondere müssen bei der Vorgabe eines Arbeitspunktwechsels in einer vorgebaren Zeit  $T > 0$  hinreichend glatte bzw. ausreichend oft stetig differenzierbare Referenztrajektorien verwendet werden. Im Fall von SISO-Systemen  $n$ -ter Ordnung muss die Referenztrajektorie  $z_d(t), t \in [0, T]$   $n$ -mal differenzierbar sein, damit die Stellgröße stetig ist. Die folgende Darstellung ist [Zei12] entnommen.

Die Koeffizienten  $a_i, i = n + 1, \dots, 2n + 1$  der polynomialen Referenztrajektorie

$$z_d(t) = z_0 + (z_T - z_0) \sum_{i=n+1}^{2n+1} a_i \left(\frac{t}{T}\right)^i, \quad t \in [0, T] \quad (\text{B.1})$$

werden durch  $2(n + 1)$  Bedingungen für die beiden (stationären) Arbeitspunkte

$$z_d(0) = z_0, \quad z_d(T) = z_T, \quad \overset{(i)}{z}_d(0) = \overset{(i)}{z}_d(T) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{B.2})$$

festgelegt. Dabei ist die Transitionszeit  $T > 0$  in Abhängigkeit von der Systemdynamik und im Hinblick auf eine eventuelle Beschränkung der Stellgröße geeignet zu wählen. Die folgende Tabelle enthält die Koeffizienten  $a_i$  für die Systemordnungen von  $n = 1$  bis  $n = 7$ ; wegen  $z_d(T) = z_T$  erfüllen die Koeffizienten die leicht nachprüfbare Bedingung  $\sum_{i=n+1}^{2n+1} a_i = 1$ .

In manchen Fällen müssen auch Ableitungen der Referenz-Trajektorie vorgegeben werden. Hierfür ergibt sich durch das  $p$ -fache Ableiten von Gleichung (B.1) nach der Zeit die Form

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^p z_d(t) = (z_T - z_0) \frac{1}{T^d} \sum_{i=n+1}^{2n+1} \frac{i!}{(i-p)!} a_i \left(\frac{t}{T}\right)^{(i-p)}. \quad (\text{B.3})$$

In Abbildung B.1 sind die mit Hilfe von Gleichung (B.1) und (B.3) berechneten Referenztrajektorien  $z_d(t)$  und deren ersten beiden Ableitungen für die Ordnungen  $n = 1$  bis  $n = 7$  in dem Bereich  $t \in [0, 2]$  dargestellt. Daraus ist zu entnehmen, dass die Trajektorien mit größer werdenden Systemordnungen  $n$  immer steiler werden. Außerdem ist für  $n = 1$  das Polynom nur 1-mal stetig differenzierbar, somit ist in der 2. Ableitung am linken und rechten Rand einen Sprung zu erkennen.

Tabelle B.1: Auflistung der Polynom-Koeffizienten für Referenz-Trajektorien.

$n$	$a_{n+1}$	$a_{n+2}$	$a_{n+3}$	$a_{n+4}$	$a_{n+5}$	$a_{n+6}$	$a_{n+7}$	$a_{n+8}$
1	3	-2						
2	10	-15	6					
3	35	-84	70	-20				
4	126	-420	540	-315	70			
5	462	-1980	3465	-3080	1386	-252		
6	1716	-9009	20020	-24024	16380	-6006	924	
7	6435	-40040	108108	-163800	150150	-83160	25740	-3432

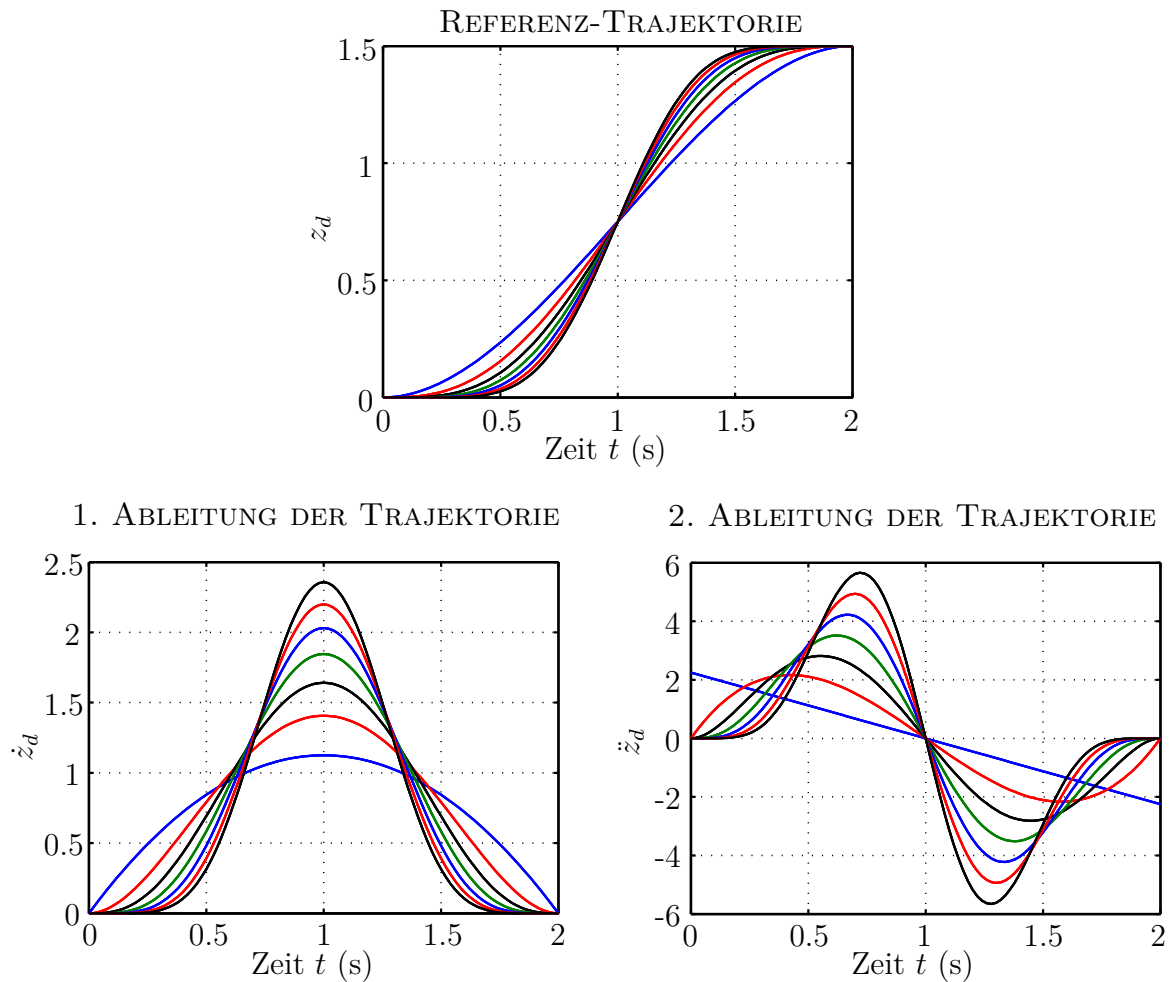


Abbildung B.1: Darstellung der Trajektorien  $n = 1..7$  und deren ersten beiden Ableitungen.

# Anhang C

## Auflistung der Simulationsparameter

In diesem Teil des Anhangs sind die verwendeten Simulationsparameter der verschiedenen Modelle aufgelistet.

Tabelle C.1: Werte für die Simulation des Ein-Massen-Schwingers.

Parameter	Wert / Formel	Einheit	Beschreibung
$\rho$	850	kg/m <sup>3</sup>	Dichte d. Hydraulikflüssigkeit
$C_d$	0.61		Durchflusskoeffizient
$\beta$	$1 \cdot 10^9$	N/m <sup>2</sup>	Kompressionsmodul
$A_A$	0.0201	m <sup>2</sup>	Kolbenfläche Kammer A
$A_B$	0.0106	m <sup>2</sup>	Kolbenfläche Kammer B
$f_{\text{link}0}$	0	N	Anfangskraft auf d. Kolben
$f_{\text{stab}}$	40	kN	Kraft zur Berech. d. Anf.-Bed.
$p_{A0}$	$f_{\text{stab}}/A_A + f_{\text{link}0}$	N/m <sup>2</sup>	Anfangsdruck in Kammer A
$p_{B0}$	$f_{\text{stab}}/A_B$	N/m <sup>2</sup>	Anfangsdruck in Kammer B
$p_S$	360	bar	Betriebsdruck der Pumpe
$p_T$	1	bar	Druck im Tank
$z_{\text{cylmin}}$	1.101	m	Länge des eingefahrenen Zylind.
$z_{\text{cyl}0}$	$z_{\text{cylmin}}$	m	Anfangslänge des Zylinders
$V_{\text{pipe}}$	13.5	dm <sup>3</sup>	Ölvolumen in Hydr.-Leitung
$l_{\text{hub}}$	1.1	m	Zylinderhublänge
$x_i$	$z_{\text{cyl}0} - z_{\text{cylmin}}$	m	Anfangsposition des Zylinderkolbens
$V_{A0}$	$A_A x_i + V_{\text{pipe}}$	m <sup>3</sup>	Anfangsvolumen in Kammer A
$V_{B0}$	$A_B(l_{\text{hub}} - x_i) + V_{\text{pipe}}$	m <sup>3</sup>	Anfangsvolumen in Kammer B
$m_p$	30	kg	Zylinderkolbengewicht
$d_p$	18500	Ns/m	Zylinderkolbendämpfung

Tabelle C.2: Zusatz-Parameter für die Simulation des linearen Modells.

Par.	Formel	Wert	Einh.	Beschreibung
$A_k$	$= (A_A + A_B)/2$	$= 0.0153$	$\text{m}^2$	Mittlere Kolbenfläche
$V_t$	$= V_{A0} + V_{B0}$	$= 0.0397$	$\text{m}^3$	Ölvolumen in Zylinderkreis
$K_q$	$\approx d_{\text{piston}} \pi C_d \sqrt{p_S/\rho}$	$= 3.9439$	$\text{m}^2/\text{s}$	wegbez. Flussverstärkung
$u_{vp}$	$\approx$ geschätzt	$= 1$	$\text{mm}$	druckrelev. Ventilöffnung
$K_c$	$\approx d_{\text{piston}} \pi C_d u_{vp} / \sqrt{p_S \rho}$	$= 1 \cdot 10^{-10}$	$\text{m}^3/\text{Pa s}$	Druckdurchflusskoeffizient
$\omega_0/2\pi$	$=$ vgl. Gl. (3.17)	$= 22.54$	$\text{Hz}$	unged. Eigenfrequenz
$\omega/2\pi$	$=$ vgl. Gl. (3.18)	$= 21.09$	$\text{Hz}$	gedämpfte Eigenfrequenz
$D$	$=$ vgl. Gl. (3.17)	$= 0.3526$		Lehr'sches Dämpfungsmaß

Tabelle C.3: Simulationsparameter für die numerische Integration.

Simulationsparameter	Wert
Solver	ode45 (Dormand-Price)
Typ	variable-step
Relative Toleranz	$5 \cdot 10^{-6}$
Maximale Schrittweite	$2 \cdot 10^{-4}$



Tabelle C.4: Bekannte Parameter der Leiterhydraulik.

Par.	Wert / Formel	Einheit	Beschreibung
$A_A$	0.0201	m <sup>2</sup>	Kolbenfläche Kammer A
$A_B$	0.0106	m <sup>2</sup>	Kolbenfläche Kammer B
$f_{\text{link0}}$	aus Gl. (4.10)	N	Anfangslast auf Zyl.-Kolben
$p_{A0}$	$f_{\text{stab}}/A_A + f_{\text{link0}}$	N/m <sup>2</sup>	Anfangsdruck in Kammer A
$p_{B0}$	$f_{\text{stab}}/A_B$	N/m <sup>2</sup>	Anfangsdruck in Kammer B
$z_{\text{cyl0}}$	$z_{\text{cyl}(t=0)}$	m	Anfangslänge des Zylinders
$z_{\text{cylmin}}$	1.101	m	Länge des eingefahrenen Zylind.
$l_{\text{hub}}$	1.1	m	Zylinderhublänge
$x_i$	$z_{\text{cyl0}} - z_{\text{cylmin}}$	m	Anfangsposition des Zylinderkolbens
$V_{A0}$	$A_A x_i + V_{\text{pipe}}$	m	Anfangsvolumen in Kammer A
$V_{B0}$	$A_B(l_{\text{hub}} - x_i) + V_{\text{pipe}}$	m	Anfangsvolumen in Kammer B
$l$	12.1	m	Leiterlänge
$l_{\text{cgL}}$	$0.4726 \cdot l$	m	Leiter-Schwerpunktslage
$d_1$	2.2061	m	Zylinderposition-1
$d_2$	0.7586	m	Zylinderposition-2
$\alpha'$	0.041	rad	Winkel: Zylinder $\rightarrow$ Leiter
$\beta'$	-1.0092	rad	Winkel: Horizontale $\rightarrow$ Zylinder
$g$	9.81	m/s <sup>2</sup>	Gravitationskonstante
$m_B$	205	kg	Masse des Korbes

Tabelle C.5: Identifizierte Parameter mit simuliertem Wertebereich.

Par.	Wertebereich	Ident.	Einheit	Beschreibung
$\beta$	$7 \cdot 10^8 \dots 1.5 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^9$	N/m <sup>2</sup>	Kompressionsmodul
$f_{\text{stab}}$	20 ... 60	40	kN	Kraft zur Berechnung d. Anf.-Bed.
$V_{\text{pipe}}$	6 ... 18	15.5	dm <sup>3</sup>	Ölvolumen in Hydr.-Leitung
$m_p$	20 ... 40	30	kg	Zylinderkolbengewicht
$d_p$	40 ... 350	324	kNs/m	Zylinderkolben-Dämpfung
$m_L$	5140 ... 5440	5440	kg	Ges.-Masse der Leiterteile (LT)
$J_L^{(A)}$	227 710 ... 234 970	234 970	kg m <sup>2</sup>	Trägheitsmoment aller LT

Tabelle C.6: Zusatz-Parameter für die Simulation des linearen Modells an der Stelle  $\phi_{L0} = 45^\circ$  bzw.  $x_0 = 0.759$  m und bei einer Leiterlänge von  $l = 12.1$  m.

Par.	Formel	Wert	Einh.	Beschreibung
$A_k$	$= (A_A + A_B)/2$	$= 0.0153$	$\text{m}^2$	Mittlere Kolbenfläche
$V_t$	$= V_{A0} + V_{B0}$	$= 0.0397$	$\text{m}^3$	Ölvolumen in Zylinderkr.
LUT3	$=$ Abbildung 4.16			Ventilkennlinie
$K_{qInt}$		$= 1$	$\text{m}^3/\text{s}$	wegbez. Flussverstärkung
$K_c$		$= 0$	$\text{m}^3/\text{Pa s}$	Druckdurchflusskoeffizient
$\Delta J_L^{(A)}$	$=$ Abgleich durch Sim.	$= 108\,000$	$\text{kg m}^2$	zusätzliches Trägheitsm.
$J_L^{(A)}$	$= J_L^{(A)} + \Delta J_L^{(A)}$	$= 335\,710$	$\text{kg m}^2$	modifiziertes Trägheitsm.
$\omega_{0FL}/2\pi$	$=$ vgl. (4.37)	$= 1.1703$	Hz	unged. Eigenfrequenz
$\omega_{FL}/2\pi$	$=$ vgl. (3.18)	$= 1.1685$	Hz	gedämpfte Eigenfrequenz
$D_{FL}$	$=$ vgl. (4.37)	$= 0.0552$		Lehr'sches Dämpfungsm.

# Anhang D

## Animation hydraulischer Systeme mit MatHydAnim

Das Resultat einer Simulation wird anhand von Diagrammen analysiert und bewertet. Mit Hilfe von Animationen können die Systemkomponenten und deren Bewegungen abgebildet und veranschaulicht werden.

Für die Animation hydraulischer Kreise wurde im Rahmen der Arbeit die Toolbox MATHYDANIM für die MATLAB-Umgebung entwickelt. Die vollständige Beschreibung befindet sich in Kapitel D.1. In Abbildung D.1 ist ein mit MATHYDANIM definiertes Modell von einem Hydraulikzylinder mit Ein-Massen-Schwinger dargestellt. Anhand der Simulationsergebnisse können die Positionen und Farben der Modellkomponenten in jedem Zeitschritt neu berechnet und aktualisiert werden, so dass eine Animation entsteht.

Durch vorgefertigte MATLAB-Befehle lassen sich auch Videos im AVI-Format analog zum nachfolgenden Code-Beispiel D.1 erstellen. In Abbildung D.2 sind Ausschnitte aus einem erstellten Video dargestellt. Die Simulationsergebnisse stammen von dem Beispielmmodell aus Kapitel 3.2.1.

Listing D.1: MATLAB-Code zum Erstellen eines Animationsfilms.

```
1 %% Create a video of the hydraulic-animation
2 for t_idx = 1:length(simout.time)
3     ...
4     hydAnim = updateHydCylStruct(hydAnim,idHC1,...
5         'v1',p1,...
6         'v2',p2 + [x 0 0]); % MatHydAnim-Command
7     redrawHydAnim; % MatHydAnim-Command
8
9     mov(:,t_idx)=getframe(gcf); % MATLAB-Command
10 end
11
12 movie2avi(mov, 'HydSysMassSD.avi', ...
13     'fps',15,...
14     'quality',90,...
15     'compression', 'FFDS'); % MATLAB-Command
```

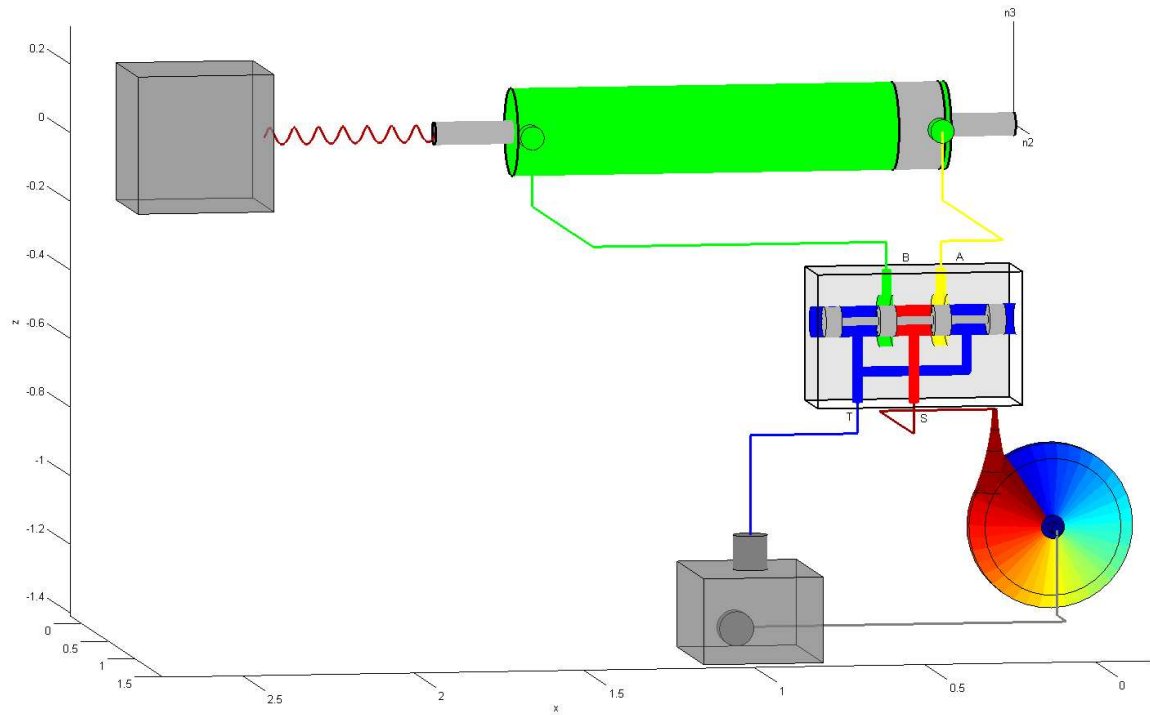


Abbildung D.1: Modell eines Ein-Massen-Schwinger-Systems, dargestellt mit Hilfe der MATHYDANIM-toolbox.

## D.1 Dokumentation der Matlab-Toolbox: MatHydAnim

Im Rahmen der Arbeit wurde für die Animation hydraulischer Kreise eine *Toolbox* mit der Bezeichnung MATHYDANIM für die MATLAB<sup>®</sup>-Umgebung entwickelt. Diesem Teil des Anhangs wird der Aufbau und die Verwendung der Software dargestellt. Bisher wurde das Programm in den MATLAB<sup>®</sup>-Versionen R2011b und R2012a getestet.

Die *Toolbox* beinhaltet eine Sammlung von MATLAB<sup>®</sup> *m-Functions*, welche die Erstellung einer 3D-Hydraulik-Animationen wesentlich vereinfacht. Durch den Aufruf von wenigen Funktionen können Hydraulikkomponenten – wie beispielsweise ein doppeltwirkender Arbeitszylinder oder ein 4/3-Wegeventil – gezeichnet und verändert werden. Somit können vorliegende Simulationsergebnisse eines Hydrauliksystems visualisiert und animiert werden. Bei Bedarf kann ein AVI-Video erstellt werden, vgl. Codeausschnitt D.1.

### D.1.1 Software-Struktur

Der Quellcode ist detailliert in Englisch kommentiert und dokumentiert, sodass eine Weiterentwicklung ohne weiteres möglich ist. Für die Verwendung der MATHYDANIM-

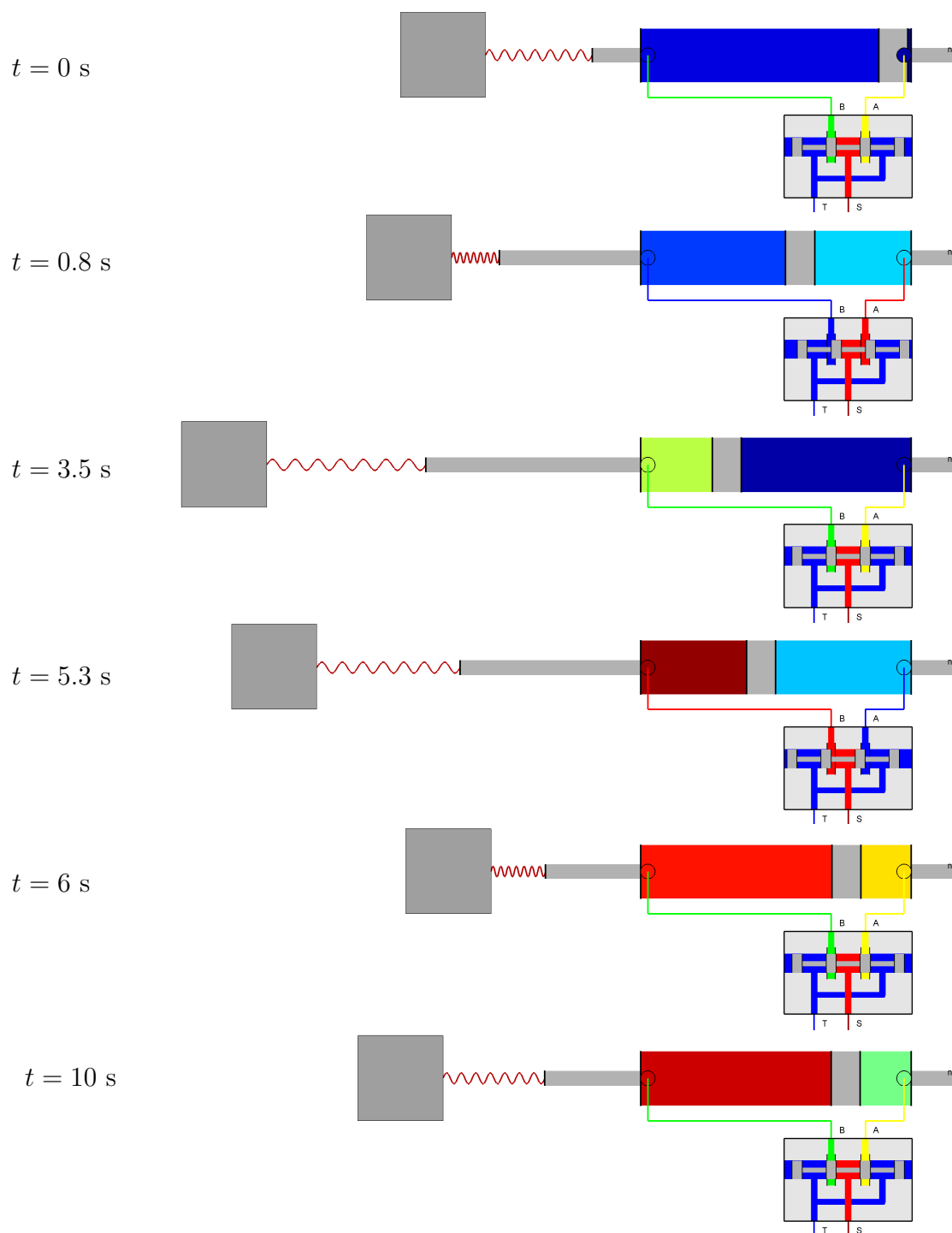
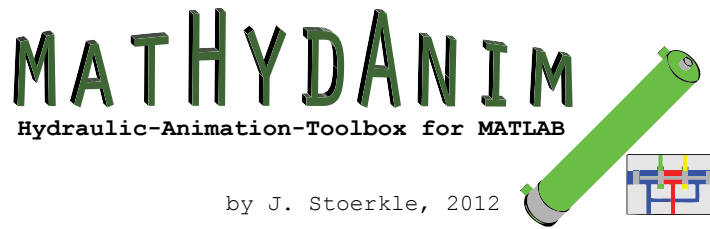


Abbildung D.2: Ausschnitte aus einer MATHYDANIM-Animation eines Hydraulikzylinders mit Ein-Massen-Schwinger.



by J. Stoerkle, 2012

Abbildung D.3: MATHYDANIM-Logo.

Funktionen muss der Pfad des Hauptordners „...\\MatHydAnim“ (inklusive aller Unterordner) dem *MATLAB search path* hinzugefügt werden. Dies kann zu Beginn einer Animationserstellung mit dem Befehl

Listing D.2: MATHYDANIM-Installation.

```
1 addpath(genpath('C:\Program Files\MATLAB\R2012a\toolbox\MatHydAnim'));
```

realisiert werden, falls die MATHYDANIM-Funktionen in diesem Verzeichnis abgelegt sind. Eine Übersicht des Ordnerbaums ist in Abbildung D.4 dargestellt. Die Funktionen mit den fett gedruckten Bezeichnungen werden in der Regel direkt vom Benutzer zum Erstellen der Animation verwendet. Die Ordner mit der Prefix-Bezeichnung „Hyd...“ enthalten bauteilspezifische Funktionen und der Ordner „development“ bzw. „old“ enthält Dateien, die zur Tool-Entwicklung beigetragen haben. Diverse Beispiel-Animationen zur Einarbeitung eines Benutzers sind im Ordner „examples“ enthalten. Jedes entwickelte m-File besitzt einen *Header*, der die Funktionsweise des Codes und die *Input* bzw. *Output* Argumente der Funktion beschreibt. Für die Funktion „*newHydCyl(...)*“ ist der *Header* exemplarisch in Abbildung D.5 dargestellt. Alle optionalen Argumente werden immer paarweise übergeben, sodass der Programmcode übersichtlich bleibt.

## D.1.2 Objekt-Struktur

Das Tool generiert während der Laufzeit ein sogenanntes MATLAB<sup>®</sup>-*Struct*-Objekt, welches alle Eigenschaften der vom Benutzer definierten Animation enthält. Dieses Objekt wird dann als Argument bei einem MATHYDANIM-Funktionsaufruf übergeben, ggf. verändert und zurückgegeben. Standardmäßig wird die Animationsstruktur mit dem Namen „*hydAnim*“ bezeichnet und im MATLAB<sup>®</sup>-*Workspace* gespeichert. Der grundlegende Aufbau dieser Strukturvariablen ist in Abbildung D.6 dargestellt. Die fett gedruckten Strukturen beinhalten die Instanzen der eigentlichen Hydraulikbauteile bzw. deren Objekte. Wird beispielsweise der Animation ein doppelwirkender Hydraulikzylinder hinzugefügt (*newHydCyl(hydAnim,[0 0 0], [1 0 0]);*) so ist dieser standardmäßig mit dem Namen „*DblHydCyl\_1*“ in der Struktur „*hydCyls*“ gespeichert. Diese Struktur beinhaltet Objekteigenschaften wie z.B. der *Name*, die *id* oder die anfängliche Startposition „*v\_10*“ und Endposition „*v\_20*“. Die markierten Struktur-Objekte in

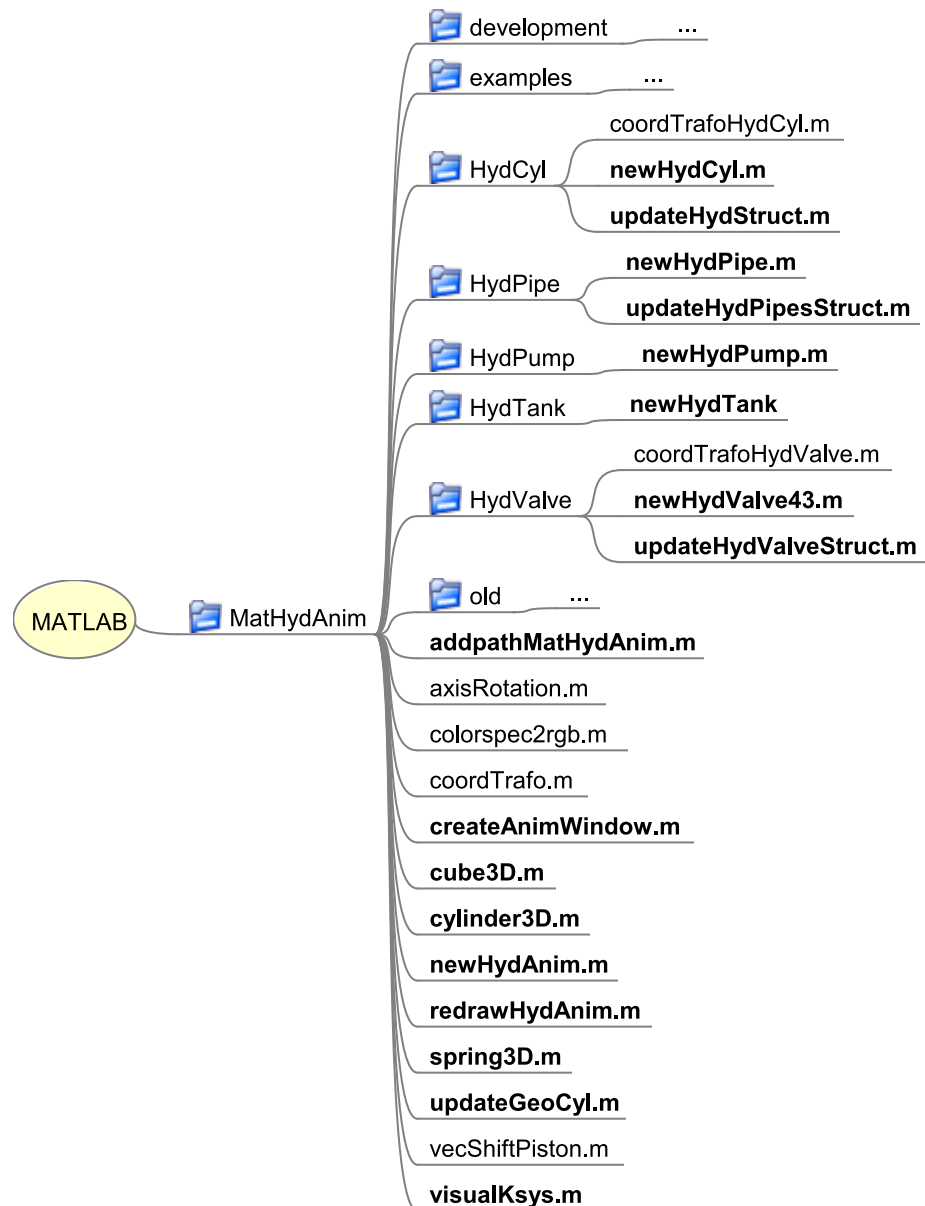


Abbildung D.4: Darstellung der MATHYDANIM Funktions-Struktur.

```

MATLAB File Help: newHydCyl      View code for newHydCyl      Default Topics

newHydCyl

Specify and draw a new hydraulic cylinder with default geometric values in percent, which are adjustable. The most important para are the hydAnim-Struct, the start-point 'v1_0' and end-point 'v2 hydraulic cylinder.

Input arguments
-----
Mandatory:
hydAnim ..... HydAnim-Struct
v1_0 ..... Start-point-vector
v2_0 ..... End-point-vector

Optional arguments are to be passed in pairs (default value):
--- geometric values in Percent % :
l_left ..... length of left (fixed) part of cylinder {0.03}
l_right ..... length of right part of cylinder {0.03}
l_cyl ..... length HydCyl {2*w_chamb + p_piston_max + w_pi
d_cyl ..... diameter HydCyl {0.15}
d_piston ..... diameter Piston {0.04}
w_piston ..... width Piston {0.08}
p_piston ..... position of the hydraulic piston {0}
p_piston_max .... maximal piston way (l_piston - w_chamb - l_rig
l_piston ..... length Piston (l_tot-l_left-w_chamb-p_piston-w
d_port ..... diameter Port (port1 & port2) {0.04}
l_port ..... length Port (port1 & port2) {0.03}
p_port ..... position Port (symetric) {d_port/2}
w_chamb ..... minimum width of chambers (>0){0.01}
theta_max ..... arg-angle of cylinder-circle-cut [rad] {2*pi}
accuracy ..... ratio for the accuracy of the displayed Animat
>1 then radius become smoother, longer calcula
<1 then radius become sharper, shorter calcula
{=1 --> N=20 points, defining a circle; =2 -->

--- figure-settings & Colors:
xlim ..... fixed x-axis range (auto)
ylim ..... fixed y-axis range (auto)
zlim ..... fixed z-axis range (auto)
bound_LineWidth . LineWidth of the HydCyl-bound {2}
bound_LineColor . LineColor of the HydCyl-bound {'k'}
bound_isDrawn ... Flag, whether the bound-line should be drawn {
rgb_chamber1 .... Color of chamber1 {'g'}
rgb_chamber2 .... Color of chamber2 {'g'}
rgb_piston ..... Color of piston and left part {[0.7 0.7 0.7]}

--- trafo:
alpha ..... angle of rotation arround the cylinder-axe {0}

```

```

Output arguments
-----
hydAnim ..... HydAnim-Struct

Call Examples
-----
[hydAnim id1] = newHydCyl(hydAnim, [0 0 0], [1 0 0],...
    'accuracy',1,...
    'p_piston',0,...
    'bound_isDrawn',0,...
    'theta_max',2*pi,...
    'alpha',0,...
    'l_right',0.2,...
    'l_left',0.3);

Description: Hydraulic Cylinder (Double acting, single rod)
-----

l_left          l_cyl          p_piston l_right
<---><-----><-----><-----><----->
          |d_cyl          w_piston          l_piston
          <-----><-----><----->
          V
-----
|w_chamb.          |-----|          .w_chamb|          | d_piston
|<----->|          | |          .<----->|          V
-----|          . p_piston | |----->-----|
| |          .----->|          'piston'          |
-----|          .          | |----->-----|
| |          . 'chamb1' | | 'chamb2'.          |
| |          |-----| |-----|
--| |          |----->-----| |-----| l_port
| |          |----->-----| |-----| V
'port1'          <--d_port          'port2'
                                p_port
                                |<-->

Author:      Johannes Stoerkle
Date:        11.07.2012
Modified:

- MathyAnim -
Hydraulic Animation-Toolbox for Matlab
2012, ISYS University of Stuttgart

See also
cylinder3D, updateHydCylStruct, redrawHydAnim

```

Abbildung D.5: MATLAB®-Hilfe zur Funktion mit der Bezeichnung *newHydCyl*.



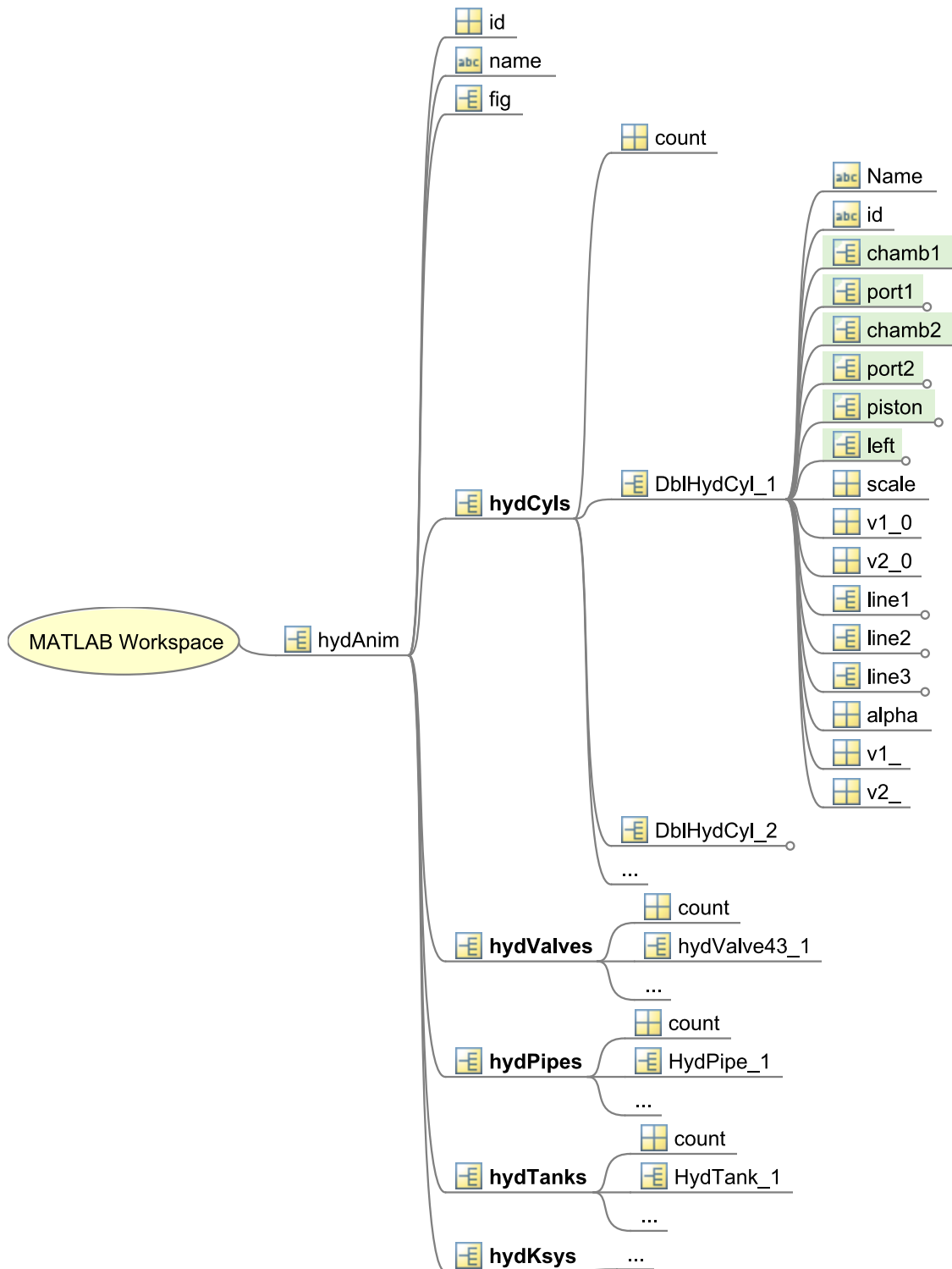


Abbildung D.6: Darstellung der MATHYDANIM Objekt-Struktur.

Abbildung D.6 werden beispielsweise mit der Funktion „*cylinder3D(...)*“ erstellt, und charakterisieren jeweils die Brandungslinien und Oberflächen eines zylinderförmigen Teils. Durch das Zeichnen aller Teilzylinder, Flächen und Linien entsteht der komplette Hydraulikzylinder mit zwei Kammern und einem Kolben.

Die anderen Bauteile werden auf ähnliche Art und Weise erstellt. Der Benutzer kann auf die Geometrieproportionen Einfluss nehmen und zum Beispiel einen sehr schmalen und langen Hydraulikzylinder generieren. Alle Bauteile werden zuerst in festen Koordinaten und Proportionen erstellt und anschließend auf die gewünschte Größe und Position transformiert. Die transformierten Koordinaten haben jeweils die Endung „\_“.

### D.1.3 Animationsstruktur

Für die Erstellung einer Animation mit MATHYDANIM ist es empfehlenswert zwei MATLAB®-Dateien vorzubereiten. Die erste Datei mit der Bezeichnung „*defSys.m*“ definiert, modelliert und visualisiert das Hydrauliksystem. Außerdem erstellt sie gleichzeitig die Objekt-Struktur. Hierfür sind die wichtigsten Funktionen im folgenden Programmbeispiel aufgeführt.

Listing D.3: Beispielhaftes *defSys.m*-File.

```

1 % Use MatHydAnim-Toolbox-functions
2 addpathMatHydAnim;
3 % Create new HydAnim-Struct
4 hydAnim = newHydAnim('name', 'HydAnim_Test');
5 % Create an Animation-Window
6 hydAnim = createAnimWindow(hydAnim);
7 % Create a new Hydraulic-Cylinder
8 [hydAnim idHC1] = newHydCyl(hydAnim, [1 0 0], [0 0 0]);
9 % Create a new Hydraulic-Valve43
10 [hydAnim idHV1] = newHydValve43(hydAnim, [0.25 -1 0], [0.75 -1 0]);
11 % Pipes HydValve-HydCyl
12 [hydAnim idHP1_1] = newHydPipe(hydAnim, ...
13     'idObjStart', idHV1, ...
14     'portNameStart', 'portA', ...
15     'idObjEnd', idHC1, ...
16     'portNameEnd', 'port1');
17 [hydAnim idHP1_2] = newHydPipe(hydAnim, ...
18     'idObjStart', idHV1, ...
19     'portNameStart', 'portB', ...
20     'idObjEnd', idHC1, ...
21     'portNameEnd', 'port2');
```

Die zweite Datei mit der Bezeichnung „*runAnim.m*“ generiert die Animation mit Hilfe einer Schleife, die beispielsweise über Simulationsergebnisse iteriert und dabei die Bauteileigenschaften aktualisiert.

Listing D.4: Beispielhaftes *runAnim.m*-File.

```

1 % Init values form simulation-results
2 t_anim = simout.time; % simulaiton-time
3 s = simout.signals.values((1:sr2:Midx), 1); % valve position
```

```

4 x = simout.signals.values((1:sr2:Midx),9); % cylinder-piston position
5
6 for t_idx = 1:length(t_anim)
7     % Update valve-piston position:
8     hydAnim = updateHydValveStruct(hydAnim,idHV1,'alpha',pi*3/2,...
9         'p_piston',s(t_idx));
10    % Update hydraulic-cylinder piston:
11    p2_x = [1 0 0] + [x(t_idx) 0 0];
12    hydAnim = updateHydCylStruct(hydAnim,idHC1,...
13        'v1',[0 0 0],...
14        'v2',p2_x);
15    % Redraw hydAnim-Struct:
16    redrawHydAnim(hydAnim);
17    pause(0.08)
18 end;

```

### D.1.4 Besondere Features

- Mit den Funktionen „*cube3D(...)*“, „*spring3D(...)*“ und „*cylinder3D(...)*“ können zusätzlich Quader, Feder und Zylinder-Objekte bei der Systemdefinition hinzugefügt werden, die die Animation grafisch aufwerten.
- Mit der Funktion „*newHydPipe(...,'portNameStart',[id1],'portNameEnd',[id2])*“ lassen sich dynamische Hydraulikleitungen zwischen zwei Anschlüssen visualisieren, deren Position sich mit einem verbundenen Anschluss automatisch ändert.
- Mit Hilfe von *colormaps* z.B. „*jet*“ können die strömungsmechanischen Größen sogar farblich dargestellt werden. So kann beispielsweise der transiente Druck in einer Zylinderkammer animiert werden.
- Die Funktion „*createAnimWindow(...)*“ kann mit dem optionalen Argument *'subplot'* das Hauptanimationsfenster in einem *Subplot* erstellen, sodass im gleichen Fenster während der Animation auch Graphen in einem anderen *Subplot* gezeichnet werden können. Bei Bedarf können so auch mehrere Animationsinstanzen gleichzeitig dargestellt und verglichen werden.
- Durch vorgefertigte MATLAB<sup>®</sup>-Befehle lassen sich sogar Videos im *AVI*-Format erstellen, vgl. D.1.

## D.2 Beispiel-Code

Der folgende MATLAB<sup>®</sup>-Code erstellt die Animation eines Hydraulikkreises mit *Ein-Massen-Schwinger*, vgl. Abbildung D.1 und Abbildung D.2.

Listing D.5: Datei zur Modellierung eines Hydraulikkreises mit *Ein-Massen-Schwinger*.

```

1  %% ----- defSys.m-File -----
2  %% Description:
3  % Test to define / create Hydraulic System in MatHydAnim
4  % --> Define a mass-spring-damping-System with
5  %           - 1 HydTank
6  %           - 1 HydPump
7  %           - 1 HydCyl
8  %           - 1 HydValve
9  %           - 1 mass
10 %           - 1 connecting spring-damping-Element
11 %   in MatHydAnim.
12
13 %% Define System: Use MatHydAnim-Toolbox-functions
14 addpathMatHydAnim;
15
16 % Create new HydAnim-Struct
17 hydAnim = newHydAnim('name', 'HydAnim_Test');
18
19 % Create an Animation-Window
20 hydAnim = createAnimWindow(hydAnim);
21 view([0,1,0]); %set viewpoint to x=0,y=1,z=0
22
23 % Define hydCyl
24 p1 = [0 0 0];           % start positions
25 p2 = [1.701 0 0];      % end positions
26
27 % Define hydValve positions
28 pos1 = [0.8 1.3 -0.67];
29 pos2 = [0.2 1.3 -0.67];
30 s_scale = 3; % scale-factor for valve-piston movement
31 xi_ = s_scale * 0.002;
32
33 % Define hydPump positions
34 pos1_tank = [0.8 1.52 -1.4];
35 pos2_tank = [0.8 1.02 -1.4];
36
37 % Define hydPump positions
38 pos1_pump = [0 0.6 -1.1];
39 pos2_pump = [0 0.8 -1.1];
40
41 % Define load-geometies
42 l_s0 = 0.5;           %initial length of the spring
43 l_cube = [0.4 0.4 0.4];
44
45 % pipe points
46 vPassA{1} = [0.42 1.3 -0.2];

```

```

47 conDirectA = [1 0];
48 vPassB{1} = [0.58 1.3 -0.2];
49 conDirectB = [1 0];
50 vPassT{1} = [0.66 1.27 -0.76];
51 conDirectT = [1 0];
52
53 %% Produce Objects
54 % Create a tank
55 [hydAnim idHT] = newHydTank(hydAnim, pos1_tank, pos2_tank, 'alpha', pi);
56
57 % Create a new Hydraulic Pump
58 [hydAnim idHPu] = newHydPump(hydAnim, pos1_pump, pos2_pump, ...
59     'alpha', pi/2);
60
61 % Create a new Hydraulic-Cylinder
62 [hydAnim idHC1] = newHydCyl(hydAnim, p1, p2, ...
63     'accuracy', 3, ...
64     'p_piston', 0, ...
65     'bound_isDrawn', 0, ...
66     'theta_max', 2*pi, ...
67     'alpha', pi, ...
68     'p_piston_max', 1.1/norm(p2-p1), ...
69     'l_left', 0.12);
70
71 % Draw a new Coordinate-System
72 visualKsys([0.3 0 0], [0 0.3 0], [0 0 0.3], ...
73     'h_fig', hydAnim.fig.h_fig, ...
74     'Color', 'k');
75
76 % Create a new Hydraulic-Valve43
77 [hydAnim idHV1] = newHydValve43(hydAnim, pos1, pos2, ...
78     'p_piston', 0, ...
79     'xi', xi_, ...
80     'alpha', pi*3/2);
81
82 % Create a mass-cube
83 massCube = cube3D('pos', p2+[l_cube(1)/2+l_s0 0 0], ...
84     'lengths', l_cube, ...
85     'facealpha', 0.5);
86 % Create a connecting spring
87 spring1 = spring3D(p2, p2+[l_s0 0 0], ...
88     'numWinding', 7, ...
89     'diameter', 0.05);
90
91 %% Pipes
92 % Pipe HydTank-HydPump
93 [hydAnim idHP_TPu] = newHydPipe(hydAnim, ...
94     'idObjStart', idHT, ...
95     'portNameStart', 'port2', ...
96     'idObjEnd', idHPu, ...
97     'portNameEnd', 'inlet', ...
98     'conDirect', 0);
99
100 % Pipe HydPump-HydValve
101 [hydAnim idHP1_3] = newHydPipe(hydAnim, ...

```

```

102         'idObjStart',idHPu,...
103         'portNameStart','outlet',...
104         'idObjEnd',idHV1,...
105         'portNameEnd','ports',...
106         'conDirect',0);
107
108 % Pipes HydValve-HydCyl
109 [hydAnim idHP1_1] = newHydPipe(hydAnim,...
110         'idObjStart',idHV1,...
111         'portNameStart','portA',...
112         'idObjEnd',idHC1,...
113         'portNameEnd','port1',...
114         'conDirect',conDirectA,...
115         'vPass',vPassA);
116 [hydAnim idHP1_2] = newHydPipe(hydAnim,...
117         'idObjStart',idHV1,...
118         'portNameStart','portB',...
119         'idObjEnd',idHC1,...
120         'portNameEnd','port2',...
121         'conDirect',conDirectB,...
122         'vPass',vPassB);
123
124 % Pipes HydValve-HydTank
125 [hydAnim idHP1_4] = newHydPipe(hydAnim,...
126         'idObjStart',idHV1,...
127         'portNameStart','portT',...
128         'idObjEnd',idHT,...
129         'portNameEnd','port1',...
130         'conDirect',conDirectT,...
131         'vPass',vPassT);
132
133 redrawHydAnim(hydAnim);      % Update all graphic objects

```

Listing D.6: Datei zur Animation eines Hydraulikkreises mit *Ein-Massen-Schwinger*.

```

1  %% ----- runAnim.m-File -----
2  %% Description:
3  % Test to run an animation of Hydraulic Cylinders in MatHydAnim
4  % --> Animate a mass-spring-damp-System in
5  % MatHydAnim.
6
7  %% Animate:
8  xlim_ = [-0.3 3.8];          % Plot-Range
9  ylim_ = [-1 2];
10 zlim_ = [-1.5 0.5];
11
12 jet101 = jet(101);          % Create Colormap
13
14 p2_x = [];                  % init vectors for Trajectory
15 p2_x_old = [];
16
17 % Init values form simulation
18 sr2 = 500; %sampling-Rate
19 Midx = length(simout.time);

```

```

20 t_anim = simout.time(1:sr2:Midx);
21
22 s_scale = 3; % scale-factor for valve-piston movement
23 s = simout.signals.values((1:sr2:Midx),1); % valve position
24 x = simout.signals.values((1:sr2:Midx),9); % cylinder-piston position
25 u = simout.signals.values((1:sr2:Midx),6); % mass-load position
26 p_A = simout.signals.values((1:sr2:Midx),3); % pressure chamber A
27 p_B = simout.signals.values((1:sr2:Midx),5); % pressure chamber B
28
29 % Obtain v12_Norm(t) for each cylinder
30 v12_Norm1 = zeros(length(t_anim),1);
31 for t_idx = 1:length(t_anim)
32     v12_Norm1(t_idx) = norm([x(t_idx) 0 0]+p2-p1);
33 end
34
35 % Determine pressure max /min for coloring
36 p_max = max([p_A; p_B]);
37 p_min = min([p_A; p_B]);
38 p_Ampl = p_max - p_min;
39
40 %% Simulation
41 for t_idx = 1:length(t_anim)
42     if ~isempty(p2_x)
43         p2_x_old = p2_x;
44     end
45
46     %Piston Position
47     p2_x = p2 + [x(t_idx) 0 0];
48     for v_idx=1:size(massCube.vertices,1)
49         vertices_(v_idx,:) = massCube.vertices(v_idx,:) + [u(t_idx) 0 0];
50     end %for
51
52     % Cyl1
53     colidx_A = round((p_A(t_idx)-p_min)*100/p_Ampl)+1;
54     colidx_B = round((p_B(t_idx)-p_min)*100/p_Ampl)+1;
55     rgb_chamb1 = jet101(colidx_A,:);
56     rgb_chamb2 = jet101(colidx_B,:);
57
58     set(massCube.h_patch,'vertices',vertices_);
59
60     hydAnim = updateHydValveStruct(hydAnim,idHV1,'alpha',pi*3/2,...
61         'p_piston',s_scale*s(t_idx));
62
63     hydAnim = updateHydCylStruct(hydAnim,idHC1,...
64         'v1',p1,...
65         'v2',p2_x,...
66         'rgb_chamber1',rgb_chamb1,...
67         'rgb_chamber2',rgb_chamb2);
68
69     %% Redraw HydAnim
70     spring1 = spring3D(p2_x,p2+[u(t_idx)+1_s0 0 ...
71         0], 'springstruct',spring1);
72     redrawHydAnim(hydAnim,'xlim',xlim_,'ylim',ylim_,'zlim',zlim_);
73     pause(0.08)
74 end

```





# Abbildungsverzeichnis

1.1	Darstellung des hydraulischen Antriebs einer Feuerwehdrehleiter. . . .	8
2.1	Mechanisches Modell eines Hydraulikzylinders. . . . .	10
2.2	Hydraulisches Modell eines doppeltwirkenden Hydraulikzylinders. . . .	10
2.3	Scharfkantige hydraulische Drossel. . . . .	12
2.4	Bauformen verschiedener Ventile mit zwei Anschlüssen. . . . .	14
2.5	Durchströmung und Überdeckung eines 3/3-Wegeventils. . . . .	15
2.6	Durchströmung eines 4/3-Wegeventils. . . . .	18
3.1	Beispiel eines Hydraulikkreises. . . . .	20
3.2	Blockschaltbild des Modells eines Hydraulikzylinders mit Ein-Massen-Schwinger. . . . .	20
3.3	Mechanisches Modell des doppeltwirkenden Hydraulikzylinders mit angekoppeltem Ein-Massen-Schwinger. . . . .	21
3.4	Volumen der belasteten Flüssigkeit im Hydraulikkreis. . . . .	23
3.5	Linearisiertes-Modell des doppelt wirkenden Hydraulikzylinders mit angekoppeltem Ein-Massen-Schwinger. . . . .	25
3.6	Vergleich der Simulationsergebnisse des nichtlinearen Modells $\Sigma$ und des linearen Modells $\Sigma_{\text{lin}}$ . . . . .	27
4.1	Darstellung der IVECO MAGIRUS M60L Feuerwehdrehleiter. Quelle: <i>Iveco Magirus Brandschutztechnik GmbH</i> . . . . .	30
4.2	Kinematik-Modell der Feuerwehrleiter. . . . .	30
4.3	Berechnung der Verkippung des Hydraulikzylinders gegen die Horizontale. . . . .	31
4.4	Mechanisches Gesamtmodell der Feuerwehrleiter. . . . .	33
4.5	Trägheitsmoment des Leitersatzes. . . . .	34
4.6	Darstellung des Übertragungsverhaltens vom Stellsignal zur Ventilposition (LUT1). . . . .	35
4.7	Hydraulikkreis des Antriebes der Feuerwehdrehleiter. . . . .	36
4.8	Gesamtmodell des Feuerwehrleiter-Hydraulikkreises. . . . .	36
4.9	Ausschnitt der Messauswertung am realen Modell. . . . .	38
4.10	Darstellung der berechneten Kolbenposition und Kolbengeschwindigkeit anhand eines Messdatenausschnitts. . . . .	38
4.11	Darstellung des Übertragungsverhaltens der Ventilposition zur quasistatischen Zylinderkolben-Geschwindigkeit (LUT2). . . . .	39
4.12	Hydraulisches Modell zur Ventilidentifikation. . . . .	39
4.13	Darstellung der Simulationsschleife für die Parameter-Identifikation. . . . .	40
4.14	Statischer Anteil der nichtlinearen und der linearisierten Kolbenkraft. . . . .	43

4.15	LTI-Modell der Leiterhydraulik. . . . .	44
4.16	Zusammenhang der quasistatischen Kolbengeschwindigkeit $v_{\text{cyl}}$ und des Ventilsteuersignals $u$ , genannt „LUT3“ (Kombination von LUT1 & LUT2). . . . .	44
4.17	Realisierung des Ventilvolumenstroms im linearen Modell. . . . .	45
4.18	LTI-Modell der Leiterhydraulik mit Ventilkennlinie. . . . .	45
4.19	Messdatenausschnitt zu Validierung und Modellanalyse. . . . .	46
4.20	Untersuchung des globalen Hydraulikverhaltens der verschiedenen Modelle im Vergleich zur Messung. . . . .	47
4.21	Vergleich des linearen Modells $\Sigma_{\text{FL lin}}$ an der Stelle $\phi_{L0} = 45^\circ$ bzw. $x_0 = 0.759$ m und des nichtlinearen Modells $\Sigma_{\text{FL}}$ mit den gemessenen Daten im charakteristischen Bereich für die eingefahrene Feuerwehreiter ( $l = 12.1$ m). . . . .	49
4.22	Dynamikvergleich mit $\Sigma_{\text{FL lin}}$ an der Stelle $\phi_{L0} = 32^\circ$ . . . . .	50
4.23	Eigenfrequenz $\omega_{0\text{FL}}/2\pi$ und Dämpfungsmaß $D$ in Abhängigkeit vom Arbeitspunkt $\phi_{L0}$ um den die Zylinderkraft linearisiert wird. . . . .	50
5.1	Zwei-Freiheitsgrade-Regelstruktur mit Strecke $\Sigma_{\text{lin}}$ , Regler $\Sigma_{\text{FB}}$ , Vorsteuerung $\Sigma_{\text{FF}}$ und Sollwertgeber $\Sigma^*$ . . . . .	51
5.2	Gewählte Vorgehensweise beim Entwurf einer Zwei-Freiheitsgrade-Regelkreisstruktur anhand eines linearen Modells. . . . .	53
5.3	Entwurf der Parameter für die Zwei-Freiheitsgrade-Regelkreisstruktur mit dem linearen Modell $\Sigma_{\text{lin}}$ . . . . .	54
5.4	Vergleich der Simulationsergebnisse der geregelten linearen Modells $\Sigma_{\text{lin}}$ und des geregelten nichtlinearen Modells $\Sigma$ . . . . .	56
5.5	Darstellung der generierten Trajektorie. . . . .	56
5.6	Blockschaltbild des linearen Modells des Leiterantriebs $\Sigma_{\text{FL lin}}$ mit Zwei-Freiheitsgrade-Regelstruktur. . . . .	57
5.7	Simulationsergebnis des linearen Modells des Leiterantriebs $\Sigma_{\text{FL lin}}$ mit Zwei-Freiheitsgrade-Regelstruktur. . . . .	58
5.8	Simulationsergebnis des nichtlinearen $\Sigma_{\text{FL}}$ und linearen Modells $\Sigma_{\text{FL lin}}$ des Leiterantriebs mit Zwei-Freiheitsgrade-Regelstruktur. . . . .	60
A.1	Stromfaden bei veränderlichem Querschnitt. . . . .	65
A.2	Massenelement in instationärer reibungsfreier Strömung. . . . .	66
A.3	Darstellung einer ebenen Scherströmung (Couette-Strömung). . . . .	72
A.4	Kontrollvolumen zur Berechnung der Strömungskräfte am 2/2-Wegeventil. . . . .	73
A.5	Zusammensetzung der Schieberkraft für mögliche Ventilstellungen und Strömungsrichtungen an einem 2/2-Wegeventil. . . . .	75
A.6	Mechanische Modellierung des Ventilkolbens. . . . .	75
B.1	Darstellung der Trajektorien $n = 1..7$ und deren ersten beiden Ableitungen. . . . .	78
D.1	Modell eines Ein-Massen-Schwinger-Systems, dargestellt mit Hilfe der MATHYDANIM-toolbox. . . . .	84
D.2	Ausschnitte aus einer MATHYDANIM-Animation eines Hydraulikzylinders mit Ein-Massen-Schwinger. . . . .	85

D.3	MATHYDANIM-Logo. . . . .	86
D.4	Darstellung der MATHYDANIM Funktions-Struktur. . . . .	87
D.5	MATLAB <sup>®</sup> -Hilfe zur Funktion mit der Bezeichnung <i>newHydCyl</i> . . . . .	88
D.6	Darstellung der MATHYDANIM Objekt-Struktur. . . . .	89



# Tabellenverzeichnis

5.1	Ergebnisse des Entwurfs der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung für den <i>Ein-Massen-Schwinger</i> . . . . .	55
5.2	Ergebnis des Entwurfs der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung für das lineare Modell des Leiterantriebs $\Sigma_{\text{FL lin}}$ . . . . .	57
A.1	Anforderungen an Hydraulikflüssigkeiten, vgl. [WSG99]. . . . .	69
A.2	Übersicht der marktüblichen Hydraulikflüssigkeiten, vgl. [WSG99]. . . . .	70
B.1	Auflistung der Polynom-Koeffizienten für Referenz-Trajektorien. . . . .	78
C.1	Werte für die Simulation des Ein-Massen-Schwingers. . . . .	79
C.2	Zusatz-Parameter für die Simulation des linearen Modells. . . . .	80
C.3	Simulationsparameter für die numerische Integration. . . . .	80
C.4	Bekannte Parameter der Leiterhydraulik. . . . .	81
C.5	Identifizierte Parameter mit simuliertem Wertebereich. . . . .	81
C.6	Zusatz-Parameter für die Simulation des linearen Modells an der Stelle $\phi_{L0} = 45^\circ$ bzw. $x_0 = 0.759$ m und bei einer Leiterlänge von $l = 12.1$ m. . . . .	82



# Literaturverzeichnis

- [Bro05] Ilja N. Bronstejn. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch Verlag, Frankfurt am Main, 2005.
- [FF94] D. Findeisen and F. Findeisen. *Ölhydraulik: Handbuch für die hydrostatische Leistungsübertragung in der Fluidtechnik*. Springer, Berlin, 1994.
- [GS08] F. Gersbach and O. Sawodny. *Modellbildung und -verifikation eines hydraulischen Ventil-Aktor-Systems*. Studienarbeit. ISYS, Institut für Systemdynamik, Universität Stuttgart, 2008.
- [Hor63] I. M. Horowitz. *Synthesis of feedback systems*. Academic Press, New York, 1963.
- [HZ04] V. Hagenmeyer and M. Zeitz. *Flachheitsbasierter Entwurf von linearen und nichtlinearen Vorsteuerungen*. Automatisierungstechnik 52 Nr. 1, Oldenbourg Verlag, 2004.
- [Kem12] W. Kemmettmüller. *Vorlesungsskript des Regelungstechnik Seminars SS 2012*. TU Wien, Institut für Automatisierungs- & Regelungstechnik, 2012.
- [Lun10] J. Lunze. *Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Springer, Berlin, 2010.
- [Man05] Noah D. Manring. *Hydraulic control systems*. Wiley, Hoboken, NJ, 2005.
- [Mer67] Herbert E. Merritt. *Hydraulic control systems*. Wiley, New York, 1967.
- [Oer05] H. Oertel. *Strömungsmechanik: Methoden und Phänomene*. Universitätsverlag, Karlsruhe, 2005.
- [PS11] A. Pertsch and O. Sawodny. *Implementierung der aktiven Schwingungsdämpfung für die DLK60CS*. Unveröffentlichter Bericht. ISYS, Institut für Systemdynamik, Universität Stuttgart, 2011.
- [Rüc06] V. Rückel. *Rechnergestützte Ablaufplanung und Bahngenerierung für kooperierende Industrieroboter*. Fertigungstechnik Erlangen. Meisenbach Verlag, 2006.
- [Sch90] W. Schiehlen. *Multibody Systems Handbook*. Springer, Berlin, 1990.
- [WSG99] D. Will, H. Ströhl, and N. Gebhardt. *Hydraulik: Grundlagen, Komponenten, Schaltungen*. Springer, Berlin, 1999.

- [Zei12] M. Zeitz. *Berechnung von polynomialen Referenz-Trajektorien*. Hilfsblatt zur Vorlesung Flache Systeme. ISYS, Institut für Systemdynamik, Universität Stuttgart, 2012.
- [Zim11] N. Zimmert. *Methoden zur aktiven Schwingungsdämpfung bei Hubgeräten*. Berichte aus dem Institut für Systemdynamik, Universität Stuttgart. Shaker Verlag, Aachen, 2011.
- [ZSKL09] N. Zimmert, O. Sawodny, R. Keck, and C. Lauterjung. *Höher, schneller, weiter – Aktive Schwingungsdämpfung für Feuerwehrdrehleitern*. dSPACE Magazin, Vol. 2, S. 30–35, Paderborn, 2009.